

**ANALISIS KESTABILAN MODEL SDILR (*SUSCEPTIBLE-
DANGEROUS-INFECTIVE-LATENT-RECOVERED*)
DENGAN ADANYA PENGULANGAN RUMOR
PADA MEDIA SOSIAL**

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna
Memperoleh Gelar Sarjana Sains
dalam Ilmu Matematika



Diajukan Oleh:

DWI IRMAYANTI

NIM: 1708046001

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO SEMARANG
2017**

**ANALISIS KESTABILAN MODEL SDILR (SUSCEPTIBLE-
DANGEROUS-INFECTIVE-LATENT-RECOVERED)**

DENGAN ADANYA PENGULANGAN RUMOR

PADA MEDIA SOSIAL

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna
Memperoleh Gelar Sarjana Sains
dalam Ilmu Matematika



Diajukan Oleh:

DWI IRMAYANTI

NIM: 1708046001

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO SEMARANG
2017**

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertandatangan dibawah ini:

Nama : Dwi Irmayanti

NIM : 1708046001

Jurusan : Matematika

Menyatakan bahwa skripsi yang berjudul:

**ANALISIS KESTABILAN MODEL SDILR (*SUSCEPTIBLE-
DANGEROUS-INFECTIVE-LATENT-RECOVERED*)
DENGAN ADANYA PENGULANGAN RUMOR
PADA MEDIA SOSIAL**

Secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri, kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 29 Juni 2021

Yang Menvatakan,

A 10,000 Rupiah Indonesian banknote is shown, oriented vertically. The note is pink and white. It features the Garuda Pancasila emblem in the center. The number '10000' is printed in large, bold digits. The text 'SERUAN RIBU RUPIAH' is visible at the top. The signature of Dwi Irmayanti is written in black ink over the right side of the note. The serial number '5A545AJX017204510' is printed at the bottom.

Dwi Irmayanti

NIM : 1708046001



KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka Ngaliyan Semarang
Telp.024-7601295 Fax.7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini:

Judul : **Analisis Kestabilan Model SDILR (*Susceptible-Dangerous-Infective-Latent-Recovered*) dengan Adanya Pengulangan Rumor pada Media Sosial**

Penulis : **Dwi Irmayanti**

NIM : 1708046001

Jurusan : Matematika

Telah diujikan dalam sidang tugas akhir oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 29 Juni 2021

DEWAN PENGUJI

Ketua Sidang,

Minhayati Shaleh, M.Sc

NIP. 19760426 200604 2 001

Sekretaris Sidang,

Yulia Romadiastri, M.Sc

NIP. 19810715 200501 2 008

Penguji Utama I,

Emy Siswanah, M.Sc

NIP. 19870202 201104 2 001

Penguji Utama II,

Ahmad Aunur Rohman, M.Pd

Pembimbing I,

Siti Maslihah, M.Si.

NIP.19770611 201101 2 004

Pembimbing II,

Zulaikha, S.Si., M.Si.

NIP. 19920409 201903 2 027



NOTA DINAS

Semarang, 29 Juni 2021

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum wr.wb

Dengan ini diberitahukan bahwa, saya telah melakukan bimbingan, arahan, dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : Analisis Kestabilan Model SDILR (*Susceptible-Dangerous-Infective-Latent-Recovered*) dengan Adanya Pengulangan Rumor pada Media Sosial

Nama : **Dwi Irmayanti**

NIM : 1708046001

Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang untuk diajukan dalam sidang Munaqosyah.

Wassalamu'alaikum wr.wb

Pembimbing I,



Siti Maslihah, M.Si.

NIP.19770611 201101 2 004

NOTA DINAS

Semarang, 29 Juni 2021

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum wr.wb

Dengan ini diberitahukan bahwa, saya telah melakukan bimbingan, arahan, dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : Analisis Kestabilan Model SDILR (*Susceptible-Dangerous-Infective-Latent-Recovered*) dengan Adanya Pengulangan Rumor pada Media Sosial

Nama : **Dwi Irmayanti**

NIM : 1708046001

Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang untuk diajukan dalam sidang Munaqosyah.

Wassalamu'alaikum wr.wb

Pembimbing II,



Zulaikha, S.Si., M.Si.,

NIP. 19920409201903 2 027

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirahim

Puji syukur Alhamdulillah penulis panjatkan kehadiran Allah SWT yang telah memberikan kesehatan jasmani dan rohani, rahmat, hidayah serta inayahNya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini, sebagai sebagian syarat yang wajib dipenuhi guna memperoleh gelar sarjana Srtata Satu (S1). Shalawat serta salam penulis haturkan kepada junjungan Nabi Agung Nabi Muhammad SAW. Yang telah membawa risalah yang penuh dengan ilmu pengetahuan, ilmu-ilmu umum dan ilmu keagamaan, sehingga dapat menjadi bekal hidup kita, baik di alam dunia maupun di akhirat kelak.

Ucapan terimakasih penulis sampaikan kepada semua pihak yang telah memberikan pengarahan, bimbingan, semangat, dan bantuan yang sangat berarti bagi penulis sehingga skripsi ini dapat penulis selesaikan dengan baik, maka dalam kesempatan kali ini dengan kerendahan hati dan rasa hormat penulis haturkan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. H. Ismail, M.Ag., selaku ketua Dekan
Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo
Semarang

2. Ibu Emy Siswanah, M.Sc., selaku ketua jurusan Matematika UIN Walisongo Semarang
3. Bapak Aunur, M.Pd., selaku sekretaris jurusan matematika UIN Walisongo Semarang
4. Ibu Eva Khoirun Nisa, M.Sc., selaku wali dosen penulis.
5. Ibu Siti Maslihah, M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan waktu dan bimbingannya, sehingga skripsi dapat selesai.
6. Ibu Zulaikha, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan waktu dan bimbingannya, sehingga skripsi dapat selesai.
7. Segenap dosen, pegawai dan seluruh civitas akademika lingkungan UIN Walisongo Semarang terkhusus dosen jurusan Matematika.
8. Kedua orang tua penulis Bapak Mundakir dan Ibu Badriyah, atas kepercayaan, jerih payah dan pengorbanan tanpa pamrih, yang doanya selalu menyertai dalam perjalanan penulis. Semoga selalu dalam lindungan Allah SWT, Amin.
9. Kakak penulis Muakhor Ibnu Sujak, yang selalu menjadi patner dalam meraih mimpi-mimpi bersama, semoga mendapat keberkahan di setiap langkah.
10. Teman-teman Matematika angkatan 2017, yang selalu memberi semangat kepada penulis.

11. Teman-teman KKN MIT DR ke XI posko 48 kelurahan Sumuwono Kab. Semarang, yang telah memberikan kenangan indah dan motivasi dalam perjuangan penulisan skripsi ini.
12. Semua pihak yang turut serta membantu dalam menyelesaikan skripsi ini, yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Semoga Allah SWT membalas jasa-jasanya dengan balasan yang setimpal. Penulis menyadari, bahwa skripsi ini masih banyak kekurangan dan jauh dari kesempurnaan. Namun penulis berharap, semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis serta pembaca. Semoga kita mendapatkan ridla dari Allah SWT, Amin.

Semarang, 29 Juni 2021

Penulis,



Dwi Irmayanti

NIM. 1708046001

ABSTRAK

Penelitian ini membahas analisis kestabilan model SDILR dengan adanya pengulangan rumor pada media sosial. Adapun model yang digunakan adalah model yang diambil dari jurnal Yao-yao dkk dengan judul "*stability analysis of an SDILR model based on rumor recurrence on social media*". Seluruh populasi dikelompokkan menjadi lima kelas: *susceptible* (S), *dangerous* (D), *infective* (I), *latent* (L), *recovered* (R), yang mana masing-masing mewakili, orang yang tidak mengetahui adanya rumor (S), mereka yang mengetahui adanya rumor dan memiliki kemungkinan untuk menyebarkan (D), mereka yang menyebarkan rumor (I), mereka yang telah menyebarkan rumor tetapi berhenti menyebarkan sementara (L), dan orang-orang yang berhenti menyebarkan rumor (R). Dengan total populasi N merupakan individu yang memiliki media sosial.

Pada model yang digunakan akan dilakukan analisis dinamik berupa penentuan titik kesetimbangan bebas rumor, titik kesetimbangan endemik, angka reproduksi dasar (R_0), analisis kestabilan titik kesetimbangan, dan simulasi numerik dari model matematika pengulangan rumor di media sosial menggunakan Matlab R2011a. Adapun metode yang digunakan dalam melakukan analisis adalah studi pustaka. Hasil analisa menunjukkan bahwa model memiliki dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas rumor $P^0 = (N, 0, 0, 0)$ dan titik kesetimbangan endemik $P^* = \left(\frac{(\sigma + \eta + \mu)(\phi\gamma + \phi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)}{\beta\eta(\theta + \phi + \mu)}, \frac{\mu(N - S)}{\sigma + \eta + \mu}, \frac{\mu(N - S)}{\beta S}, \frac{\gamma I}{\theta + \phi + \mu} \right)$. Titik kesetimbangan yang diperoleh digunakan untuk mencari angka reproduksi dasar (R_0). Bilangan R_0 merupakan kondisi ambang batas untuk menentukan apakah suatu populasi terjadi endemik atau akan bebas rumor. Analisis kestabilan pada keadaan bebas rumor akan stabil asimtotik lokal ketika

$R_0 < 1$, sehingga rumor tidak akan menyebar dalam populasi. Dan pada keadaan endemik sistem akan stabil asimtotik lokal ketika $R_0 > 1$. Selanjutnya dilakukan simulasi numerik pada model SDILR penyebaran rumor di media sosial menggunakan software Matlab R2011a dan diperoleh hasil yang sama dengan analisis sebelumnya. Tujuan dari penelitian ini yaitu memberikan gambaran dari mekanisme penyebaran rumor sehingga dapat melakukan upaya pengendalian dan memberikan pemahaman tentang penyebaran rumor di media sosial.

Kata Kunci : Model epidemik SDILR, titik kesetimbangan, analisis kestabilan.

TRANSLITERASI ARAB-LATIN

Penulisan transliterasi huruf-huruf Arab Latin dalam skripsi ini berpedoman pada (SKB) Menteri Agama dan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia, tanggal 22 Januari 1988 Nomor: 158 Tahun 1987 dan Nomor: 0543b/U/1987, sebagaimana yang tertera dalam buku Pedoman Transliterasi Bahasa Arab (A Guide to Arabic Tranliterationstion)

Daftar huruf bahasa arab dan transliterasinya ke dalam huruf Latin dapat dilihat pada halaman berikut:

Huruf Arab	Nama	Huruf Latin
ا	Alif	A
ب	Ba	B
ت	Ta	T
ث	Tsa	Ts
ج	Ja	J
ح	Ha	H
خ	Kha	Kh

د	Da	D
ذ	Dzal	Dz
ر	Ra	R
ز	Za	Z
س	Sin	S
ش	Syin	Sy
ص	Shad	Sh
ض	Dlad	DI
ط	Tha	Th
ظ	Zha	Zh
ع	Ain	‘
غ	Ghain	Gh
ف	Fa	F
ق	Qof	Q
ك	Kaf	K
ل	Lam	L

م	Mim	M
ن	Nun	N
و	Wau	W
هـ	Ha	H
ء	Hamzah	‘
ي	Ya	Y

DAFTAR ISI

JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN	ii
NOTA DINAS.....	iii
NOTA DINAS.....	Error! Bookmark not defined.
KATA PENGANTAR	vi
ABSTRAK	ix
TRANSLITERASI ARAB-LATIN.....	xi
DAFTAR ISI	xiv
DAFTAR TABEL	xvi
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xviii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
A. Latar Belakang Masalah.....	1
B. Rumusan Masalah	8
C. Batasan Masalah.....	8
D. Tujuan Penelitian.....	9
E. Manfaat Penelitian	9
BAB II LANDASAN TEORI	10
A. Pemodelan Matematika	10

B. Persamaan Diferensial	14
C. Persamaan Diferensial Biasa.....	15
D. Sistem Persamaan Diferensial.....	15
E. Sistem Persamaan Diferensial Linear dan Nonlinear ..	16
F. Nilai Eigen dan Vektor Eigen.....	18
G. Titik Keseimbangan	19
H. Linearisasi	20
I. Angka Reproduksi Dasar (R_0)	21
J. Kriteria Routh-Hurwitz.....	23
K. Metode Euler.....	24
L. Kajian Pustaka.....	26
BAB III METODE PENELITIAN	30
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	32
A. Hasil Penelitian.....	32
1. Model Matematika Pengulangan Rumor di Media Sosial	32
2. Titik Keseimbangan	37
3. Angka Reproduksi Dasar (R_0).....	41
4. Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan.....	44
5. Simulasi Numerik	61
B. Pembahasan	69
BAB V PENUTUP.....	71
Daftar Pustaka.....	73
Lampiran.....	75

DAFTAR TABEL

Tabel	Judul	Halaman
Tabel 4.1	Deskripsi variabel model matematika pengulangan rumor di media sosial	35
Tabel 4.2	Deskripsi parameter model matematika pengulangan rumor di media sosial	35
Tabel 4.3	Nilai-nilai Parameter untuk Simulasi Model saat $R_0 < 1$	62
Tabel 4.4	Nilai-nilai Parameter untuk Simulasi Model saat $R_0 > 1$	66

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Judul	Halaman
Gambar 2.1	Proses Memodelkan	11
Gambar 2.2	Diagram Transfer Model SDILR Penyebaran Rumor	13
Gambar 4.1	Diagram Transfer Model SDILR Penyebaran Rumor	36
Gambar 4.2	Grafik Dinamika saat $R_0 < 1$	64
Gambar 4.3	Grafik Dinamika saat $R_0 > 1$	67

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1. Program MATLAB model matematika penyebaran rumor di media sosial	75

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Perkembangan teknologi memiliki dampak yang besar dalam kehidupan manusia. Salah satunya dalam penyebaran informasi, Informasi dengan sangat mudah disebarluaskan dan dapat diakses oleh banyak orang. Kemudahan serta efisiensi dalam memperoleh atau menyebarkan informasi merupakan hasil dari media online yang merupakan wadah penyebaran informasi yang paling berpengaruh dalam masyarakat. Hal tersebut diperkuat dengan hasil survei Mastel atau masyarakat telematika pada februari 2017 yang menyebutkan bahwa media sosial dan aplikasi percakapan merupakan sarana utama penyebaran berita bohong atau rumor. Menurut wahyuni dkk, rumor merupakan suatu informasi yang menjadi minat publik untuk disimak akan tetapi belum dipastikan kebenarannya.

Dewasa ini penyebaran rumor semakin hari semakin mengkhawatirkan. Terlebih dampak dari penyebaran rumor yang tidak terkendali dapat merugikan banyak pihak, mulai dari dampak yang sederhana seperti keresahan masyarakat, sampai dampak yang fatal seperti kematian. Pada masa pandemi ini, banyak tersebar rumor terkait Covid-19 yang merugikan masyarakat. Rumor yang beredar mengenai covid-

19 adalah bahwa masyarakat Indonesia kebal terhadap Covid-19, namun mitos masyarakat Indonesia kebal Covid-19 pun terpatahkan saat diumumkan terdapat dua warga Indonesia yang positif terjangkit virus ini oleh Presiden Joko Widodo (Jokowi) pada tanggal 02 Maret 2020.

Beredar informasi di media sosial yang menyebutkan konsumsi minuman alkohol dapat mengurangi risiko terinfeksi Covid-19, dalam unggahan tersebut menunjukkan surat edaran dari Saint's Luke Hospital Kansas City. Adapun pihak Saint's Luke Hospital membantah jika surat edaran tersebut berasal dari Saint's Luke Hospital. Beberapa masyarakat Turki menelan mentah-mentah informasi tersebut sehingga mengorbankan banyak nyawa dalam upaya mencegah penularan virus corona. Akibatnya, 20 orang dirawat di rumah sakit di Istanbul setelah meminum etanol dan menimbulkan korban meninggal dunia sebanyak 30 orang. (Saputra, 2020) Pada kasus ini, pemodelan matematika dapat digunakan untuk menggambarkan mekanisme penyebaran rumor sehingga dapat melakukan upaya penendalian dan memberikan pemahaman tentang penyebaran rumor yang cenderung terus meningkat.

Dalam agama Islam menyebarkan berita hoax atau berita bohong merupakan tindakan yang bertentangan dengan ajaran agama. Sesuai yang telah Allah firmankan

bahwa tidak semua informasi yang beredar itu benar dan sesuai dengan fakta, Allah SWT berfirmana dalam surat Al-Isra' ayat 17:

وَكَمْ أَهْلَكْنَا مِنَ الْقُرُونِ مِنْ بَعْدِ نُوحٍ ۖ وَكَفَىٰ بِرَبِّكَ بِذُنُوبِ عِبَادِهِ خَبِيرًا بَصِيرًا

“Dan janganlah kamu mengikuti sesuatu yang tidak kamu ketahui. Karena pendengaran, penglihatan, dan hati nurani, semua itu akan diminta pertanggung jawabannya.” (Devid Saputra, 2020)

Ayat tersebut ditafsirkan oleh Aid Al-Qarni bahwa ketika mengetahui suatu informasi hendaknya jangan langsung meyakini karena sesungguhnya penglihatan, pendengaran, dan hati manusia, semuanya akan diperhitungkan dihadapan Allah. Diturunkannya Nabi Muhammad adalah sebuah bentuk bahwasanya agama Islam benar-benar menjunjung tinggi nilai-nilai kejujuran bagi pemeluknya, yang mana beliau memiliki sifat wajib diantaranya sifat shidiq yang berarti benar, apapun yang disampaikan oleh Nabi adalah benar adanya. Kejujuran merupakan jalan menuju keselamatan baik di dunia maupun di akhirat, sebaliknya kebohongan merupakan jalan menuju kejahatan. Menyebarkan rumor atau berita bohong merupakan perbuatan munkar. Sehingga menyebarkan rumor

ataupun berita bohong adalah tindakan yang menyalahi ajaran Islam.

Selain itu, dalam bidang keilmuan telah banyak dilakukan penelitian mengenai rumor oleh para ilmuwan terdahulu. Penelitian mengenai model penyebaran rumor diawali dengan model DK yang diperkenalkan oleh Daley dan Kendall (1965). Konstruksi model penyebaran rumor memiliki kemiripan dengan konstruksi model epidemi penyebaran penyakit. Seperti dalam penelitian ini subpopulasi dibagi menjadi tiga yaitu subpopulasi *Ignorant (Susceptible)*, subpopulasi *spreader (Infected)* dan subpopulasi *stifler (Recovered)*. Tiga subpopulasi tersebut menjelaskan subpopulasi yang belum mengetahui rumor (*Ignorant*) subpopulasi yang menyebarkan rumor (*Spreader*), dan subpopulasi yang tidak menyebarkan rumor (*Stifler*). Pada model ini ketika terjadi interaksi pada subpopulasi *Ignorant* dengan subpopulasi *Spreader*, maka secara alami individu pada subpopulasi *Ignorant* akan berubah menjadi subpopulasi *Spreader*, begitu pula jika subpopulasi *Spreader* melakukan interaksi dengan subpopulasi lain, maka individu dalam subpopulasi *Spreader* menjadi subpopulasi *Stifler*. Model DK ini tidak mempertimbangkan adanya waktu yang diperlukan untuk kemudian menerima atau bahkan menyebarkan rumor. Pada tahun 2017 Chen Wan, Tao Li dan

Zhicheng Sun melakukan penelitian mengenai penyebaran rumor dengan mempertimbangan mekanisme ragu-ragu. Dalam penelitian ini model penyebaran rumor dianalogikan kedalam empat subpopulasi yaitu *susceptible* (S) mereka yang tidak mengetahui adanya rumor, *exposed* (E) mereka yang mengetahui adanya rumor dan ragu-ragu untuk menyebarkan, *infected* (I) mereka yang menyebarkan rumor, dan *recovered* (R) yaitu mereka yang berhenti menyebarkan rumor. Dengan mempertimbangkan bahwa ketika individu mengetahui adanya rumor, mereka tidak akan langsung menyebarkan rumor tersebut namun memerlukan waktu berfikir untuk menyebarkan rumor atau tidak. Sehingga pada model dalam penelitian ini menambahkan kelas *Exposed* dari model umum SIR.

Pada penelitian sebelumnya tidak diamati adanya pola pengulangan penyebaran rumor yang seringkali terjadi pada media sosial. Selain itu, pada media sosial individu yang telah menyebarkan rumor dapat menjadi komunikator lagi ketika terjadi suatu peristiwa atau keadaan tertentu. Beberapa warga daring juga lebih suka menyebarkan topik rumor yang sama berulang-ulang setelah terjadinya peristiwa tertentu. Misalnya, ketika mencari kata “gempa” pada media sosial, orang dapat memperoleh jutaan postingan tentang informasi yang salah. Beberapa postingan ini diunggah oleh individu

yang sama selama gempa bumi yang berbeda, tetapi sebenarnya postingan ini memiliki topik rumor yang sama, yaitu berita yang mengklaim akan terjadi gempa bumi lainnya. Fenomena ini menginspirasi penulis untuk membangun model propagasi rumor yang lebih tepat pada penyebaran rumor yang berulang.

Skripsi ini mengulas artikel Yao yao, dkk. (2019) yang membahas pengulangan rumor di media sosial menggunakan analogi model SDILR (*Susceptible–Dangerous–Infective–Latent–Recovered*). Seluruh populasi dikelompokkan menjadi lima kelas: rentan (S), berbahaya (D), terinfeksi (I), latent (L), pulih (R), yang mana masing-masing mewakili, orang yang tidak mengetahui adanya rumor (S), mereka yang mengetahui adanya rumor dan memiliki kemungkinan untuk menyebarkan (D), mereka yang menyebarkan rumor (I), mereka yang telah menyebarkan rumor tetapi berhenti menyebarkan sementara (L), dan orang-orang yang berhenti menyebarkan rumor (R). Adapun model matematika pengulangan rumor di media sosial yang digunakan dalam skripsi ini di tunjukkan oleh sistem persamaan differensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned} S'(t) &= \mu N - \beta SI - \mu S, \\ D'(t) &= \beta SI - \sigma D - \eta D - \mu D, \\ I'(t) &= \eta D - \gamma I + \theta L - \mu I, \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$L'(t) = \gamma I - \theta L - \varphi L - \mu L,$$

$$R'(t) = \sigma D + \varphi L - \mu R.$$

Dalam model SDILR diatas tidak ada kemungkinan bagi populasi rentan untuk langsung menjadi terinfeksi, populasi rentan akan menjadi bahaya terlebih dahulu sebelum mereka memiliki potensi menjadi terinfeksi. Populasi yang mengetahui adanya rumor dan memiliki kemungkinan untuk menyebarkan juga memiliki kesempatan untuk berubah menjadi pulih dengan segera, jika mereka tidak tertarik atau tidak percaya pada rumor. Populasi yang tidak terinfeksi akan berubah menjadi latent ketika rumor terbukti salah. Keadaan latent adalah keadaan khusus, dalam keadaan ini individu dapat benar-benar kehilangan keinginan mereka untuk menyebarkan rumor dan kemudian menjadi pulih, atau kembali menyebarkan rumor yang diulang dan menjadi terinfeksi kembali.

Berdasarkan uraian diatas penulis tertarik untuk membahas dan mengkaji Analisis Kestabilan Model SDILR dengan Adanya Pengulangan Rumor Pada Media Sosial. Analisis dinamik yang digunakan meliputi menentukan titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar, analisis kestabilan, dan simulasi numerik pada model untuk memperkuat hasil analisis.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan di atas maka dapat dirumuskan beberapa rumusan masalah yang akan dibahas sebagai berikut:

1. Bagaimana analisis kestabilan dari model pada keadaan bebas rumor dan endemik?
2. Bagaimana interpretasi hasil simulasi numerik model?

C. Batasan Masalah

Pembahasan model SDILR dengan adanya pengulangan rumor di media sosial dipengaruhi oleh berbagai faktor, oleh karenanya diperlukan batasan pembahasan supaya tidak melenceng dari rumusan masalah, batasan yang di berikan antara lain:

1. Pendefinisian model SDILR pengulangan rumor di media sosial bersumber dari jurnal internasional yang berjudul "Stability analysis of an SDILR model based on rumor recurrence on social media" oleh Yao Yao dkk, penentuan titik kesetimbangan bebas rumor, titik kesetimbangan endemik , dan analisis kestabilan titik-titik kesetimbangannya serta simulasi numerik.
2. Seluruh populasi merupakan individu yang memiliki media sosial.
3. Populasi yang pulih memiliki kekebalan permanen.

D. Tujuan Penelitian

Berdasarkan permasalahan di atas, tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah :

1. Mengetahui analisis kestabilan dari model pada keadaan bebas rumor dan endemik.
2. Menginterpretasikan hasil simulasi numerik model.

E. Manfaat Penelitian

1. Bagi Penulis

Sebagai upaya untuk memperdalam pengetahuan mengenai model SDILR pengulangan rumor di media sosial. Sekaligus sebagai sarana agar terpenuhinya prasyarat kelulusan program studi Matematika S1 UIN Walisongo.

2. Bagi Mahasiswa Matematika

Sebagai referensi untuk memperluas wawasan mengenai model SDILR pengulangan rumor di media sosial.

3. Bagi Pembaca

Sebagai wacana untuk mengetahui model SDILR pengulangan rumor di media sosial.

BAB II

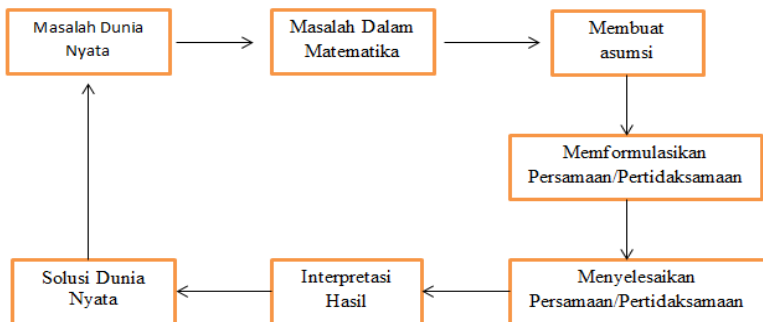
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dijelaskan konsep-konsep dasar yang digunakan sebagai bahan acuan, diantaranya: pemodelan matematika, persamaan diferensial, persamaan diferensial biasa, sistem persamaan diferensial, sistem persamaan diferensial linear dan nonlinear, nilai eigen dan vektor eigen, titik kesetimbangan, linearisasi, angka reproduksi dasar, dan kriteria Routh-Hurwitz serta dalam akhir bab akan dijelaskan kajian pustaka yang menjadi pertimbangan penelitian.

A. Pemodelan Matematika

Model bisa diartikan sebagai gambaran miniatur dari sesuatu benda, uraian atau analogi untuk membantu dalam memvisualisasi segala sesuatu yang tidak bisa diamati secara langsung. Pemodelan matematika merupakan suatu bahasan mengenai konsep matematika yang merepresentasikan dan menjelaskan permasalahan di dunia nyata ke dalam pernyataan matematika.

Proses pemodelan dapat digambarkan dalam alur diagram berikut (Widowati, 2007)



Gambar 2.1 Proses Memodelkan

Keterangan gambar:

1. Memodelkan masalah dunia nyata ke dalam matematika.

Langkah yang pertama dalam proses pemodelan adalah memodelkan permasalahan dunia nyata ke dalam bahasa matematika. Langkah ini meliputi pemahaman pada karakteristik permasalahan yang akan dimodelkan kemudian membatasi permasalahan yang akan dibahas. Identifikasi dan pembatasan masalah menghasilkan variabel-variabel yang dapat dibentuk beberapa hubungan antar variabel- tersebut. Kemudian menjabarkan variabel-variabel dan sistem menjadi model.

2. Membuat asumsi

Langkah selanjutnya membuat asumsi, asumsi di sini mencerminkan proses berpikir agar suatu model dapat berjalan. Dengan kata lain, asumsi dibuat agar model

mengarah pada suatu fisik yang kompleks sehingga terbentuklah suatu permasalahan yang dapat diselesaikan.

3. Memformulasi persamaan/pertidaksamaan

Langkah selanjutnya yaitu memformulasikan persamaan atau sistem persamaan. Memformulasikan persamaan/pertidaksamaan merupakan langkah penting, sehingga terkadang perlu menguji ulang asumsi-asumsi agar langkah ini dapat dirselesaikan dan realistik.

4. Menyelesaikan persamaan/pertidaksamaan

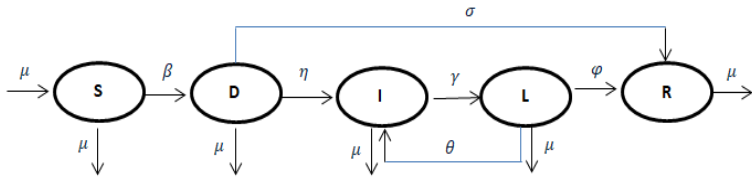
Setelah persamaan diperoleh, selanjutnya persamaan akan diselesaikan secara matematis dengan menggunakan sistem persamaan diferensial. Dalam menyelesaikan persamaan/pertidaksamaan ini perlu ketelitian serta fleksibilitas dalam proses pemodelan secara menyeluruh.

5. Interpretasi Hasil

Langkah yang terakhir yaitu Interpretasi hasil, merupakan tahapan yang menghubungkan formula matematika ke permasalahan dunia nyata. Menginterpretasikan hasil dapat dilakukan dengan berbagai cara seperti melalui grafik yang menggambarkan solusi yang diperoleh.

Adapun kontruksi model yang digunakan dalam karya tulis ini adalah SDILR (*susceptible-dangerous-infective-latent-recovered*). Seluruh populasi dikelompokkan menjadi lima

kelas: rentan (S), berbahaya (D), terinfeksi (I), latent (L), pulih (R), yang mana masing-masing mewakili, orang yang tidak mengetahui adanya rumor (S), mereka yang mengetahui adanya rumor dan memiliki kemungkinan untuk menyebarkan (D), mereka yang menyebarkan rumor (I), mereka yang telah menyebarkan rumor tetapi berhenti menyebarkan sementara (L), dan orang-orang yang berhenti menyebarkan rumor (R). Model SDILR dijelaskan dengan Gambar 2.2



Gambar 2.2 Diagram Transfer Model SDILR Penyebaran Rumor

Rumus model yang diberikan:

$$\begin{aligned}
 S'(t) &= \mu N - \beta SI - \mu S, \\
 D'(t) &= \beta SI - \sigma D - \eta D - \mu D, \\
 I'(t) &= \eta D - \gamma I + \theta L - \mu I, \\
 L'(t) &= \gamma I - \theta L - \varphi L - \mu L, \\
 R'(t) &= \sigma D + \varphi L - \mu R.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dimana

μ = tingkat kelahiran/ kematian alami;

β = probabilitas transisi dari populasi rentan ke populasi yang berbahaya;

η = probabilitas transisi dari populasi berbahaya ke populasi terinfeksi;

σ = probabilitas transisi dari populasi berbahaya ke pulih;

γ = probabilitas transisi dari terinfeksi ke latent, yaitu tingkat kontrol;

θ = probabilitas transisi dari latent ke terinfeksi, yaitu tingkat pengulangan;

φ = probabilitas transisi dari latent ke dipulihkan, yaitu tingkat pemulihan;

B. Persamaan Diferensial

Bentuk dari persamaan yang memuat derivative (turunan). dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas suatu fungsi disebut persamaan diferensial. Akan ditunjukkan suatu persamaan sebagai berikut:

$$F(x, y', y'', y''', \dots, y^n) = 0$$

Persamaan diatas merupakan bentuk dari persamaan diferensial dengan orde-n yang menyatakan hubungan antara fungsi $y(x)$, x , dan turunannya y', \dots, y^n .

Persamaan diferensial dapat dibedakan menjadi dua macam menurut banyaknya variabel bebas, yaitu biasa dan parsial (Lestari, 2013).

C. Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa merupakan persamaan yang memuat satu atau lebih turunan dari variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas suatu fungsi. Orde dari suatu persamaan diketahui dengan melihat pangkat paling tinggi pada turunan yang ada dalam persamaan. Derajat merupakan pangkat tertinggi dari turunan tingkat paling tinggi.

Terdapat dua solusi dari persamaan diferensial yaitu solusi umum dan solusi khusus. Solusi umum yaitu suatu keluarga fungsi yang memuat satu atau lebih parameter dan memenuhi persamaannya. Sedangkan suatu fungsi yang merupakan anggota dari keluarga fungsi solusi umumnya adalah solusi khusus dari suatu persamaan diferensial biasa.

D. Sistem Persamaan Diferensial

Diberikan vektor $y \in \mathbb{R}^n$, dengan $x = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ dan $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Notasi $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ digunakan untuk menyatakan turunan x terhadap t ,

$$\dot{y} = \left(\frac{dy_1}{dt}, \frac{dy_2}{dt}, \dots, \frac{dy_n}{dt} \right)^T$$

Diberikan sistem autonomous

$$\dot{y} = f(y) \quad (2.2)$$

Sistem diatas merupakan suatu sistem persamaan diferensial dengan variabel bebas yang implisit dengan $y \in L \subseteq \mathbb{R}^n, f: L \rightarrow \mathbb{R}^n, L$ berupa himpunan terbuka dan $f \in C^1(L)$ dengan C^1 merupakan notasi dari himpunan semua fungsi yang mempunyai turunan pertama kontinu di L . Sistem (2.2) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \frac{dy}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(y_1, y_2, \dots, y_n)^T \\ f_2(y_1, y_2, \dots, y_n)^T \\ \vdots \\ f_n(y_1, y_2, \dots, y_n)^T \end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= f_1(y_1, y_2, \dots, y_n)^T \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(y_1, y_2, \dots, y_n)^T & \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= f_n(y_1, y_2, \dots, y_n)^T \end{aligned}$$

E. Sistem Persamaan Diferensial Linear dan Nonlinear

Suatu sistem persamaan diferensial yang terdiri dari satu persamaan linier yang saling terkait disebut sebagai sistem persamaan diferensial linier. Adapun sistem persamaan diferensial yang terdiri dari dua atau lebih

persamaan nonlinier yang saling terkait merupakan sistem persamaan nonlinier. (Boyce dan DiPrima, 2001)

Adapun sistem persamaan diferensial linear yang berorde satu dan memiliki variabel tak bebas x_1, x_2, \dots, x_n serta variabel bebas t , dapat dinyatakan dalam suatu sistem persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + h_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + h_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + h_n(t)\end{aligned}\tag{2.3}$$

Pada sistem persamaan diatas, apabila $h_i, i = 1, 2, \dots, n$ bernilai nol, maka sistem persamaan (2.3) merupakan sistem yang homogen, apabila bernilai tak nol, maka sistem (2.3) disebut sistem persamaan diferensial linear nonhomogen. Sistem persamaan (2.3) dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan berikut:

$$\dot{x} = Ax + H(t)\tag{2.4}$$

A merupakan matriks koefisien dari variabel tak bebas $x \in \mathbb{R}^n$, dengan A berupa matriks ukuran $n \times n$. Untuk $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$ serta $H(t)$ berupa matriks yang berukuran $n \times 1$ dan merupakan fungsi dari t ,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ \vdots \\ h_n(t) \end{bmatrix}$$

F. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.1

Jika A suatu matriks berukuran n X n. Maka, vektor tak nol x dalam \mathbb{R}^n dinamakan vektor eigen (eigen vector) dari matriks A jika Ax berupa kelipatan skalar dari x yaitu

$$Ax = \lambda x \quad (2.5)$$

Dengan λ berupa skalar. Skalar λ disebut nilai eigen dari A dan x dinyatakan sebagai vektor eigen yang bersesuaian dengan λ . (Anton, 1987)

Persamaan (2.5) dapat disederhanakan menjadi

$$Ax = \lambda x$$

$$Ax = \lambda Ix$$

$$(\lambda I - A)x = 0 \quad (2.6)$$

I berupa matriks identitas, pada persamaan tersebut akan bernilai tak nol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad (2.7)$$

persamaan (2.7) adalah persamaan karakteristik dari matriks A. Nilai skalar yang memenuhi persamaan (2.5) disebut sebagai nilai eigen dari A. Bentuk polinomial karakteristik dari matriks A, matriks A berukuran n X n adalah sebagai berikut:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \dots + b_n$$

Dan menjadi

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \dots + b_n = 0$$

dengan $b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$.

G. Titik Keseimbangan

Definisi 2.2

Diberikan sistem persamaan diferensial

$$\dot{x} = f(x), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2.8)$$

Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ merupakan titik keseimbangan dari sistem apabila $f(\bar{x}) = 0$ terpenuhi. (Wiggins, 1990)

Definisi 2.3

Diberikan suatu sistem persamaan diferensial

$$\frac{dx}{dt} = x = f(x) \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$

Jika $f(\bar{x}) = 0$ maka titik \bar{x} disebut sebagai titik keseimbangan. (Tu, 1994)

Definisi 2.4

Titik keseimbangan $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ sistem (2.8) dapat dikatakan:

1. Sistem dapat dikatakan stabi lokal jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta$ berlaku $\|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq t_0$.
2. Stabil asimtotik lokal apabila titik keseimbangan $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ stabil serta terdapat $\delta_0 > 0$ sedemikian hingga

untuk tiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta_0$
berlaku $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$.

3. Titik kesetimbangan $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tidak stabil apabila (1) tidak terpenuhi (Wiggins, 2003)

H. Linearisasi

Dalam proses linearisasi sistem persamaan diferensial non linier akan diubah kedalam sistem persamaan differensial linear dengan matriks jacobian, sehingga bisa memudahkan dalam menentukan solusi dari sistem persamaan diferensial non linier tersebut. Solusi yang didapatkan dari proses linearisasi merupakan bentuk dari gambaran perilaku sistem disekitar titik ekuilibriumnya. Maka, kestabilan yang didapatkan melalui proses linearisasi memperoleh kestabilan lokal. Sedangkan kestabilan yang didapatkan menggunakan titik ekuilibriumnya dinamakan kestabilan global (Pagalay, 2009).

Definisi 2.5

Diberikan fungsi $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ pada sistem $\dot{x} = f(x)$ dengan $f_i \in C(E, \mathbb{R}), i = 1, 2, \dots, n$.

$$\text{Matriks } Jf(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix}$$

Matriks di atas adalah matriks jacobian dari fungsi f di titik \bar{x} . (Kocak dan Hole, 1991)

Definisi 2.6

Sistem persamaan $\dot{x} = Jf(\bar{x})(x - \bar{x})$ merupakan bentuk linearisasi dari sistem $\dot{x} = f(x)$ di sekitaran titik \bar{x} (Perko, 1991).

Titik kesetimbangan $x \in \mathbb{R}$ dinamakan titik kesetimbangan hiperbolik jika bagian real dari nilai eigen $\neq 0$. Apabila bagian real dari nilai eigen $Jf(x) = 0$ titik kesetimbangan x dinamakan titik kesetimbangan nonhiperbolik. Oleh karenanya, jika titik kesetimbangan hiperbolik maka untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.14) dapat diketahui dari sistem hasil linearisasinya. Sebaliknya jika titik kesetimbangan non hiperbolik maka kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.14) tidak dapat diketahui dari sistem hasil linearisasinya (perko,1991).

I. Angka Reproduksi Dasar (R_0)

Tolak ukur yang dapat digunakan untuk melihat bagaimana potensi penyebaran rumor dalam suatu populasi dapat dengan menggunakan angka reproduksi dasar (R_0). Besar angka reproduksi dasar dilihat dari nilai titik

kesetimbangan model. Kemungkinan yang timbul adalah sebagai berikut:

1. jika $R_0 < 1$ maka titik kesetimbangan bebas rumor akan stabil simtotik lokal, pada keadaan ini penyebaran rumor dalam suatu populasi akan semakin berkurang dan kemudian menghilang.
2. jika $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan bebas rumor tidak stabil dan rumor sangat mungkin untuk menyebar.

Misalkan terdapat m kelas tidak terinfeksi dan n kelas terinfeksi. Kemudian dimisalkan x sebagai subpopulasi kelas terinfeksi dan y berupa subpopulasi kelas tidak terinfeksi (rentan atau pulih), dan $x \in \mathbb{R}^n$ serta $y \in \mathbb{R}^m$, untuk $m, n \in \mathbb{N}$, sehingga

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \varphi_i(x, y) - \psi_i(x, y) && \text{dengan } i = 1, 2, \dots, n \\ \dot{y} &= n_j(x, y) && \text{dengan } j = 1, 2, \dots, m\end{aligned}$$

Dengan matriks φ_i sebagai laju infeksi yang mempengaruhi pertambahan subpopulasi kelas terinfeksi dan matriks ψ_i sebagai laju perkembangan rumor, kematian dan atau kesembuhan yang berakibat pada berkurangnya subpopulasi kelas terinfeksi.

Perhitungan angka reproduksi dasar (R_0) berdasarkan linierisasi pada sistem persamaan diferensial disekitar titik kesetimbangan bebas rumor, persamaan kompartemen

terinfeksi yang telah dilinierisasikan dituliskan sebagai berikut:

$$\dot{x} = (F - V)x$$

Dengan F dan V berupa matriks dengan ukuran $n \times n$, $F = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu_j}(0, y_0)$ dan $V = \frac{\partial \psi_i}{\partial \mu_j}(0, y_0)$. Selanjutnya diberikan matriks K seperti berikut:

$$K = FV^{-1}$$

Dengan K dinamakan matriks *next generation*. Nilai dari infeksi sekunder pada populasi rentan adalah nilai eigen dominan dari matriks K . (Driessche dan Watmough, 2001) sehingga;

$$R_0 = \rho(FV^{-1})$$

J. Kriteria Routh-Hurwitz

Dalam menentukan akar dari persamaan karakteristik tidak selalu mudah. Oleh karenanya diperlukan aturan/kriteria yang dapat digunakan untuk mengetahui apakah akar dari suatu persamaan karakteristik bernilai negatif atau positif, sehingga dapat menentukan sifat kestabilan dari suatu titik kesetimbangan.

Sistem linier berdimensi n memiliki persamaan karakteristik yang secara umum berbentuk

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda^1 + a_n. \quad (2.9)$$

Dengan $a_i \in \mathbb{R}$ untuk setiap $i = 0, 1, \dots, n$ dan $a_n \neq 0$.

Akar-akar karakteristik persamaan (2.9) mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika

$$H_1 = |a_1| > 0$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix} > 0$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} > 0$$

$$H_k = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_2 & a_4 & a_4 & \cdot & \cdot \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_k \end{bmatrix} > 0$$

dengan $k = 1, 2, \dots, n$ dan $a_i = 0$ jika $i > n$ (Murray, 2002)

K. Metode Euler

Metode euler merupakan salah satu metode numerik yang digunakan untuk menghitung solusi dari persamaan differensial biasa. Metode euler merupakan metode orde pertama karena pencarian dalam persamaannya diambil hanya sampai orde pertamanya saja. Diberikan persamaan diferensial biasa (Griffiths & Higham, 2010)

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = f(x(t), t), \quad t > t_0 \quad (2.10)$$

$$x(t_0) = x_0$$

Penerapan metode euler untuk menyelesaikan persamaan diatasdimulai dengan menentukan deret taylor sebagai berikut:

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{1}{2!}h^2x''(t) + \dots \quad (2.11)$$

jika $R_1(t) = \frac{1}{2!}h^2x''(\ell)$ dengan $\ell \in (t, t+h)$, maka persamaan diatas dapat ditulis menjadi

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + R_1(t) \quad (2.12)$$

Jika terdapat bilangan M positif sedemikian hingga $|x''(t)| \leq M, \forall t \in (t_0, t_f)$, maka diperoleh:

$$|R_1(t)| \leq \frac{1}{2}Mh^2, \quad R_1(t) = O(h^2)$$

Langkah berikutnya jika persamaan (2.10) disubstitusikan kedalam persamaan (2.12) , maka akan diperoleh persamaan berikut:

$$x(t+h) = x(t) + hf(x(t), t) + R_1(t) \quad (2.13)$$

Dengan $R_1(t)$ berupa kesalahan dalam hal pemotongan lokal. Nilai $R_1(t)$ cukup kecil dikarenakan pengambilan nilai h yang cukup kecil. ketika $t = t_i$ dengan $t_i = t_0 + ih, i = 1:I$ dan $I = \frac{t_f - t_0}{h}$ merupakan penjumlahan dari langkah h yang tidak lebih dari $t = t_f$. Untuk $t = t_i$ untuk $i < I$ dalam persamaan (2.13) akan diperoleh:

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + hf(x(t_i), t_i) + R_1(t_i), i = 0:I-1 \quad (2.14)$$

Dengan nilai awal $x(t_0) = x_0$.

Karena nilai $R_1(t) = O(h^2)$ cukup kecil dengan nilai $h = t_{i+1} - t_i$, sehingga ketika nilai tersebut diabaikan maka akan diperoleh persamaan untuk metode euler sebagai berikut:

$$x_{i+1} = x_i + hf(x_i, t_i), \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.15)$$

L. Kajian Pustaka

Sebelum melakukan penulisan diperlukan suatu referensi mengenai pembahasan yang serupa, oleh karenanya penulis terlebih dahulu menelaah karya ilmiah yang memiliki keterkaitan dengan pembahasan dalam skripsi ini. Karya ilmiah terdahulu mampu menggambarkan secara umum tentang sasaran yang akan penulis sajikan pada skripsi ini, dengan tujuan untuk menghindari adanya kesamaan dengan karya ilmiah yang ada. Selanjutnya diperoleh beberapa karya ilmiah yang memiliki kesamaan dengan pembahasan dalam skripsi ini antara lain:

- i. Penelitian yang berjudul “STABILITY ANALYSIS OF AN SDILR MODEL BASED ON RUMOR RECURRENCE ON SOCIAL MEDIA” diterbitkan pada tahun 2019 oleh Yao Yao dkk. Penelitian oleh Yao Yao dengan penelitian dalam skripsi ini memiliki perbedaan dalam metode yang digunakan untuk melakukan simulasi Numerik. Adapun kesamaannya adalah dalam model yang

digunakan yaitu SDILR dan tahapan dalam melakukan analisis kestabilan.

- ii. Penelitian yang berjudul “GLOBAL STABILITY OF A SEIR RUMOR SPREADING MODEL WITH DEMOGRAPHICS ON SCALE-FREE NETWORKS” diterbitkan pada tahun 2017 oleh Chen Wan, Tao Li dan Zhicheng Sun. Penelitian ini diterbitkan oleh Journal Advances in Difference Equations. Tujuan penelitian ini adalah untuk memodelkan dan menganalisis model matematis penyebaran rumor. Adapun hasil dari penelitian ini didapatkan beberapa kondisi yaitu kestabilan titik kesetimbangan endemik dan kestabilan titik kesetimbangan bebas rumor. Dalam penelitian tersebut terdapat kesamaan dengan penelitian dalam skripsi ini yaitu dalam hal analisis model matematika penyebaran rumor, akan tetapi model matematika yang digunakan berbeda dengan model yang digunakan dalam skripsi ini.
- iii. Penelitian yang berjudul “ANALISIS DINAMIK MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN RUMOR” oleh Via Thoriqota Mardliyyah pada tahun 2019. Penelitian yang diterbitkan di Malang oleh Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Brawijaya ini

membahas mengenai model matematika penyebaran rumor SHIR. Hasil dari penelitian tersebut adalah bahwa dalam model matematika penyebaran rumor SHIR terdapat dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas rumor dan titik kesetimbangan endemik. Diperoleh bilangan reproduksi dasar $R_0 = \frac{\alpha B[\theta_2(\mu+\eta)+\theta_1\varphi\eta]}{\mu(\mu+\varepsilon)(\mu+\eta)}$. Ketika $R_0 < 1$ dan $d_1 + d_2 > \frac{\theta_2 \alpha B}{\mu}$, maka titik kesetimbangan bebas rumor akan stabil asimtotik lokal, serta bersifat stabil asimtotik global jika $\alpha B \leq \mu^2$. Titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik lokal jika memenuhi kriteria routh-hurwitz dan juga stabil asimtotik global. Penelitian tersebut memiliki kesamaan dalam hal analisis model matematika penyebaran rumor, akan tetapi model matematika yang digunakan berbeda dengan model yang digunakan dalam skripsi ini.

- iv. Penelitian dengan judul “KENDALI OPTIMAL MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN RUMOR PADA JARINGAN SOSIAL DARING DENGAN PEMBERIAN PERNYATAAN BALASAN” diterbitkan tahun 2019 oleh jurusan teknik sipil Politeknik Negeri Malang. Pada penelitian tersebut membahas mengenai penyebaran rumor di media sosial adapun simulasi numeriknya menggunakan software yang sama dengan skripsi ini

yaitu menggunakan Matlab. Perbedaan penelitian tersebut dengan penelitian dalam skripsi ini adalah penggunaan model matematika penyebaran rumor SEI dan adanya penambahan variabel kontrol berupa pemberian pernyataan sedangkan dalam skripsi ini menggunakan model matematika SDILR dan juga tidak ada penambahan variabel kontrol.

- v. Penelitian dengan judul “ANALISIS KESTABILAN DINAMIKA INTERAKSI PATOGEN-IMUN” oleh Ardiana diterbitkan pada tahun 2012. Penelitian tersebut memiliki penyelesaian yang sama seperti penelitian dalam langkah ini namun berbeda dalam objek yang diteliti yaitu berupa interaksi patogen-imun.

BAB III

METODE PENELITIAN

Bab ini membahas mengenai metode yang digunakan dalam penulisan skripsi. Dalam penulisan skripsi ini digunakan metode penelitian berupa studi pustaka. Studi pustaka merupakan salah satu metode dalam penelitian dengan mengumpulkan referensi melalui informasi dari buku, jurnal ilmiah ataupun literatur lain dengan tujuan untuk memperoleh suatu landasan teori. Penyelesaian persoalan sistem dinamik dari model SDILR pengulangan rumor di media sosial dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan bagaimana model matematika pengulangan rumor di media sosial menggunakan model SDILR
2. Mencari titik kesetimbangan dengan cara:
 - a. Membuat nol ruas kanan pada sistem persamaan
 - b. Pada kesetimbangan bebas rumor tidak terdapat individu dalam kelas terinfeksi sehingga $I = 0$, sedangkan pada kesetimbangan endemik $I \neq 0$.
3. Menganalisis dan menentukan kestabilan titik kesetimbangan pada model matematika pengulangan rumor di media sosial menggunakan model SDILR.

Menentukan kestabilan titik kesetimbangan dilakukan dengan langkah sebagai berikut:

- a. Melakukan pelinearan pada sistem. Linearisasi dilakukan dengan menentukan matriks Jacobian di titik kesetimbangan.
 - b. Membentuk persamaan karakteristik dari matriks Jacobian dari sistem di titik kesetimbangan.
 - c. Menentukan nilai-nilai eigen dengan menggunakan definisi polinomial karakteristik. Adapun dalam menentukan nilai eigen dapat menggunakan kriteria Routh-Hurwitz.
 - d. Menentukan angka reproduksi dasar.
 - e. Menentukan sifat kestabilannya.
4. Membuat simulasi numerik pada titik kesetimbangan model matematika pengulangan rumor di media sosial menggunakan model SDILR dengan software Matlab R2011a.
 5. Menganalisis hasil dari simulasi numerik.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Hasil Penelitian

Pada bab ini akan dibahas model pengulangan rumor dimedia sosial, kemudian akan dilakukan analisis dinamik pada model yaitu menentukan titik kesetimbangan bebas rumor, titik kesetimbangan endemik, angka reproduksi dasar, analisis titik kesetimbangan dan simulasi numerik.

1. Model Matematika Pengulangan Rumor di Media Sosial

Model yang digunakan dalam skripsi ini adalah model matematika yang terdapat pada jurnal internasional dari China yang berjudul “Stability analysis of an SDILR model based on rumor recurrence on social media” oleh Yao Yao dkk. Dalam model ini seluruh populasi dikelompokkan menjadi lima kelas: rentan (S), berbahaya (D), terinfeksi (I), latent (L), pulih (R), yang mana masing-masing mewakili, orang yang tidak mengetahui adanya rumor (S), mereka yang mengetahui adanya rumor dan memiliki kemungkinan untuk menyebarkan (D), mereka yang menyebarkan rumor (I), mereka yang telah menyebarkan rumor tetapi berhenti menyebarkan sementara (L), dan orang-orang yang berhenti menyebarkan rumor (R). Dengan $S(t) + D(t) + I(t) + L(t) + R(t) = N$, N merupakan total populasi.

Adapun model SDILR pengulangan rumor di media sosial adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 S'(t) &= \mu N - \beta SI - \mu S, \\
 D'(t) &= \beta SI - \sigma D - \eta D - \mu D, \\
 I'(t) &= \eta D - \gamma I + \theta L - \mu I, \\
 L'(t) &= \gamma I - \theta L - \varphi L - \mu L, \\
 R'(t) &= \sigma D + \varphi L - \mu R.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Pada sistem (4.1) dilakukan penskalaan, yaitu membentuk sistem kedalam bentuk proporsi antara banyak individu dalam satu populasi dengan total populasi. Sistem (4.1) disederhanakan dengan memisalkan notasi:

$$s = \frac{S}{N}; \quad d = \frac{D}{N}; \quad i = \frac{I}{N}; \quad l = \frac{L}{N} \tag{4.2}$$

Sistem (4.1) dapat disederhanakan dengan melakukan penurunan menggunakan aturan rantai serta substitusi persamaan (4.2) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{ds}{dt} &= \frac{ds}{dS} \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dS} \left(\frac{S}{N} \right) (\mu N - \beta SI - \mu S) \\
 &= \frac{1}{N} (\mu N - \beta SI - \mu S) \\
 &= \mu - \frac{\beta SI}{N} - \frac{\mu S}{N} \\
 &= \mu - \beta Si - \mu s \quad \text{(Tidak memuat variabel r)} \tag{4.3} \\
 \frac{dd}{dt} &= \frac{dd}{dD} \frac{dD}{dt} = \frac{d}{dD} \left(\frac{D}{N} \right) (\beta SI - \sigma D - \eta D - \mu D) \\
 &= \frac{1}{N} (\beta Si - \sigma D - \eta D - \mu D)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\beta SI}{N} - \frac{\sigma D}{N} - \frac{\eta D}{N} - \frac{\mu D}{N}$$

$$= \beta Si - \sigma d - \eta d - \mu d \quad (\text{Tidak memuat variabel } r) \quad (4.4)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{di}{dI} \frac{dI}{dt} = \frac{d}{dI} \left(\frac{I}{N} \right) (\beta SI - \sigma D - \eta D - \mu D)$$

$$= \frac{1}{N} (\eta D - \gamma I + \theta L - \mu I)$$

$$= \frac{\eta D}{N} - \frac{\gamma I}{N} + \frac{\theta L}{N} - \frac{\mu I}{N}$$

$$= \eta d - \gamma i + \theta l - \mu i \quad (\text{Tidak memuat variabel } r) \quad (4.5)$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dl}{dL} \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dL} \left(\frac{L}{N} \right) (\gamma I - \theta L - \phi L - \mu L)$$

$$= \frac{1}{N} (\gamma I - \theta L - \phi L - \mu L)$$

$$= \frac{\gamma I}{N} - \frac{\theta L}{N} - \frac{\phi L}{N} - \frac{\mu L}{N}$$

$$= \gamma i - \theta l - \phi l - \mu l \quad (\text{Tidak memuat variabel } r) \quad (4.6)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dR} \frac{dR}{dt} = \frac{d}{dR} \left(\frac{R}{N} \right) (\sigma D + \phi L - \mu R)$$

$$= \frac{1}{N} (\sigma D + \phi L - \mu R)$$

$$= \frac{\sigma D}{N} + \frac{\phi L}{N} - \frac{\mu R}{N}$$

$$= \sigma d + \phi l - \mu r \quad (4.7)$$

Dari persamaan (4.3) sampai persamaan (4.6) R tidak berpengaruh secara langsung pada persamaan sehingga nilai R dapat diabaikan. Kemudian lima persamaan tersebut dapat direduksi menjadi empat persamaan yaitu sebagai berikut:

$$S'(t) = \mu N - \beta SI - \mu S,$$

$$D'(t) = \beta SI - \sigma D - \eta D - \mu D,$$

$$I'(t) = \eta D - \gamma I + \theta L - \mu I, \quad (4.8)$$

$$L'(t) = \gamma I - \theta L - \phi L - \mu L,$$

Adapun variabel-variabel dan parameter-parameter yang digunakan dalam model matematika pengulangan rumor di media sosial dapat dilihat pada Tabel 4.1 dan Tabel 4.2.

Tabel 4.1 Deskripsi variabel model matematika pengulangan rumor di media sosial

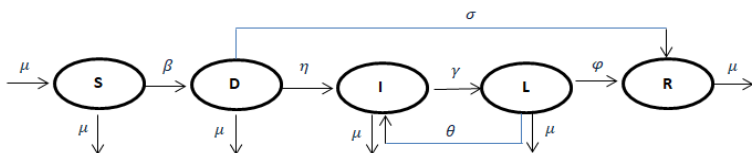
Variabel	Keterangan	Syarat
$S(t)$	Banyaknya individu rentan terinfeksi persatuan waktu (t)	$S(t) > 0$
$D(t)$	Banyaknya individu yang mengetahui adanya rumor dan memiliki kemungkinan untuk menyebarkan rumor persatuan waktu (t)	$D(t) > 0$
$I(t)$	Banyaknya individu terinfeksi persatuan waktu (t)	$I(t) > 0$
$L(t)$	Banyaknya individu yang telah menyebarkan rumor tetapi berhenti menyebarkan sementara persatuan waktu (t)	$L(t) > 0$
$R(t)$	Banyaknya individu yang telah sembuh persatuan waktu (t)	$R(t) \geq 0$

Tabel 4.2 Deskripsi parameter model matematika pengulangan rumor di media sosial

Variabel	Keterangan	Syarat
----------	------------	--------

μ	Tingkat kelahiran/ kematian alami;	$\mu > 0$
β	Probabilitas transisi dari populasi rentan ke populasi yang berbahaya;	$\beta > 0$
η	Probabilitas transisi dari populasi berbahaya ke populasi terinfeksi;	$\eta > 0$
σ	Probabilitas transisi dari populasi berbahaya ke pulih;	$\sigma > 0$
γ	Probabilitas transisi dari terinfeksi ke latent, yaitu tingkat kontrol;	$\gamma > 0$
θ	Probabilitas transisi dari latent ke terinfeksi, yaitu tingkat pengulangan;	$\theta > 0$
φ	Probabilitas transisi dari latent ke dipulihkan, yaitu tingkat pemulihan;	$\varphi > 0$

Berdasarkan persamaan (4.1) diperoleh diagram transfer model matematika pengulangan rumor di media sosial pada gambar 4.1.



Gambar 4.1. Diagram Transfer Model SDILR Penyebaran Rumor

2. Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan diperoleh dengan membuat nol ruas kanan pada sistem persamaan (4.8) $\left(\frac{dS}{dt} = \frac{dD}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dL}{dt} = 0\right)$ sehingga sistem persamaan menjadi:

$$\begin{aligned}(1) \mu N - \beta SI - \mu S &= 0 \\(2) \beta SI - \sigma D - \eta D - \mu D &= 0 \\(3) \eta D - \gamma I + \theta L - \mu I &= 0 \\(4) \gamma I - \theta L - \varphi L - \mu L &= 0\end{aligned}\tag{4.9}$$

a. Titik Kesetimbangan Bebas Rumor

Titik kesetimbangan bebas rumor terjadi ketika tidak ada penyebaran rumor dalam suatu populasi. Titik kesetimbangan diperoleh ketika tidak ada individu yang terinfeksi dalam populasi atau $I = 0$. Substitusikan $I = 0$ ke persamaan (1) pada sistem persamaan (4.9) diperoleh

$$\begin{aligned}\mu N - \beta SI - \mu S &= 0 \\ \Leftrightarrow \beta SI + \mu S &= \mu N \\ \Leftrightarrow (\beta I + \mu)S &= \mu N \\ \Leftrightarrow S &= \frac{\mu N}{\beta I + \mu} \\ \Leftrightarrow S &= \frac{\mu N}{0 + \mu} = \frac{\mu N}{\mu} = N\end{aligned}\tag{4.10}$$

Substitusikan $I = 0$ ke persamaan (2) pada sistem persamaan (4.9) diperoleh

$$\begin{aligned}\beta SI - \sigma D - \eta D - \mu D &= 0 \\ \Leftrightarrow \sigma D + \eta D + \mu D &= \beta SI\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow (\sigma + \eta + \mu)D &= \beta SI \\ \Leftrightarrow D &= \frac{\beta SI}{\sigma + \eta + \mu} = \frac{0}{\sigma + \eta + \mu} = 0\end{aligned}\tag{4.11}$$

Substitusikan $I = 0$ ke persamaan (4) pada sistem persamaan (4.9) diperoleh

$$\begin{aligned}\gamma I - \theta L - \varphi L - \mu L &= 0 \\ \Leftrightarrow \theta L + \varphi L + \mu L &= \gamma I \\ \Leftrightarrow (\theta + \varphi + \mu)L &= \gamma I \\ \Leftrightarrow L &= \frac{\gamma I}{\theta + \varphi + \mu} = \frac{0}{\theta + \varphi + \mu} = 0\end{aligned}\tag{4.12}$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan bebas rumor dapat dinyatakan dengan $P^0 = (S^0, D^0, I^0, L^0) = (N, 0, 0, 0)$, yaitu bahwa dalam keadaan bebas rumor atau ketika tidak adanya rumor yang menyebar dalam suatu populasi akan stabil dengan banyak populasi pada kelas rentan sebesar N , populasi kelas *Dangerous*, *Infected*, dan *Latent* sebesar 0.

b. Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik merupakan kondisi dimana terjadi penyebaran rumor di dalam populasi sehingga $I \neq 0$ atau $I > 0$. Dengan kata lain di dalam populasi selalu terdapat individu yang terinfeksi. Dari persamaan (2) pada sistem persamaan (4.9) diperoleh

$$\begin{aligned}\beta SI - \sigma D - \eta D - \mu D &= 0 \\ \Leftrightarrow \beta SI &= \sigma D + \eta D + \mu D \\ \Leftrightarrow S &= \frac{(\sigma + \eta + \mu)D}{\beta I}\end{aligned}\tag{4.13}$$

Dari persamaan (3) pada sistem persamaan (4.9) diperoleh

$$\eta D - \gamma I + \theta L - \mu I = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta D = -\gamma I + \theta L - \mu I$$

$$\Leftrightarrow D = \frac{\gamma I - \theta L + \mu I}{\eta} \quad (4.14)$$

Dari persamaan (1) pada sistem persamaan (4.9) diperoleh

$$\mu N - \beta SI - \mu S = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta SI = \mu N - \mu S \quad (4.15)$$

$$\Leftrightarrow I^* = \frac{\mu N - \mu S}{\beta S} = \frac{\mu N - \mu S}{\beta S} = \frac{\mu(N-S)}{\beta S} \quad (4.16)$$

Substitusikan persamaan (4.15) kedalam persamaan (2) pada sistem persamaan (4.9) diperoleh

$$\beta SI - \sigma D - \eta D - \mu D = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma D + \eta D + \mu D = \beta SI$$

$$\Leftrightarrow (\sigma + \eta + \mu)D = \beta SI$$

$$\Leftrightarrow D^* = \frac{\beta SI}{\sigma + \eta + \mu} = \frac{\mu N - \mu S}{\sigma + \eta + \mu} = \frac{\mu(N-S)}{\sigma + \eta + \mu} \quad (4.17)$$

Dari persamaan (4) pada sistem persamaan (4.9) diperoleh

$$\gamma I - \theta L - \phi L - \mu L = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta L + \phi L + \mu L = \gamma I$$

$$\Leftrightarrow (\theta + \phi + \mu)L = \gamma I$$

$$\Leftrightarrow L^* = \frac{\gamma I}{\theta + \varphi + \mu} \quad (4.18)$$

Distribusikan persamaan (4.14) dan (4.18) ke persamaan (4.13)

$$\begin{aligned} S &= \frac{(\sigma + \eta + \mu)D}{\beta I} \\ \Leftrightarrow &\frac{(\sigma + \eta + \mu)\left(\frac{\gamma I - \theta L + \mu I}{\eta}\right)}{\beta I} \\ \Leftrightarrow &\frac{(\sigma + \eta + \mu)(\gamma I - \theta L + \mu I)}{\beta \eta I} \\ \Leftrightarrow &\frac{(\sigma + \eta + \mu)\left(\gamma I - \theta\left(\frac{\gamma I}{\theta + \varphi + \mu}\right) + \mu I\right)}{\beta \eta I} \\ \Leftrightarrow &\frac{(\sigma + \eta + \mu)\left(\gamma I - \left(\frac{\theta \gamma I}{\theta + \varphi + \mu}\right) + \mu I\right)}{\beta \eta I} \\ \Leftrightarrow &\frac{(\sigma + \eta + \mu)(\gamma I(\theta + \varphi + \mu) - (\theta \gamma I) + \mu I(\theta + \varphi + \mu))}{\beta \eta I} \\ \Leftrightarrow &\frac{(\sigma + \eta + \mu)(\gamma I(\theta + \varphi + \mu) - (\theta \gamma I) + \mu I(\theta + \varphi + \mu))}{\beta \eta I(\theta + \varphi + \mu)} \\ \Leftrightarrow &\frac{(\sigma + \eta + \mu)I(\gamma(\theta + \varphi + \mu) - \theta \gamma + \mu(\theta + \varphi + \mu))}{\beta \eta I(\theta + \varphi + \mu)} \\ \Leftrightarrow &\frac{(\sigma + \eta + \mu)(\gamma \theta + \varphi \gamma + \varphi \mu - \gamma \theta + \theta \mu + \gamma \mu + \mu^2)}{\beta \eta(\theta + \varphi + \mu)} \\ \Leftrightarrow &\frac{(\sigma + \eta + \mu)(\varphi \gamma + \varphi \mu + \theta \mu + \gamma \mu + \mu^2)}{\beta \eta(\theta + \varphi + \mu)} \\ S^* &= \frac{(\sigma + \eta + \mu)(\varphi \gamma + \varphi \mu + \theta \mu + \gamma \mu + \mu^2)}{\beta \eta(\theta + \varphi + \mu)} \quad (4.19) \end{aligned}$$

Dari hasil tersebut diketahui bahwa dalam keadaan endemik atau ketika adanya rumor yang menyebar dalam suatu populasi akan stabil dengan banyak populasi

$$P^* = (S^*, D^*, I^*, L^*) = \left(\frac{(\sigma + \eta + \mu)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)}{\beta\eta(\theta + \varphi + \mu)}, \frac{\mu(N-S)}{\sigma + \eta + \mu}, \frac{\mu(N-S)}{\beta S}, \frac{\gamma I}{\theta + \varphi + \mu} \right).$$

3. Angka Reproduksi Dasar (R_0)

Angka reproduksi dasar diperoleh dengan memanfaatkan metode matriks generasi mendatang (next generation). Pada model ini sistem persamaan (4.8) yang merupakan sub populasi kelas terinfeksi adalah $X = (D, I, L)$:

$$\begin{aligned} D'(t) &= \beta SI - \sigma D - \eta D - \mu D, \\ I'(t) &= \eta D - \gamma I + \theta L - \mu I, \\ L'(t) &= \gamma I - \theta L - \varphi L - \mu L. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Selanjutnya ditentukan matriks φ sebagai laju infeksi yang mempengaruhi pertambahan subpopulasi kelas terinfeksi dan matriks ψ sebagai laju perkembangan rumor, kematian dan atau kesembuhan yang berakibat pada berkurangnya subpopulasi kelas terinfeksi.

$$\varphi = \begin{bmatrix} \beta SI \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

$$\psi = \begin{bmatrix} (\sigma + \eta + \mu)D \\ -\eta D + \gamma I - \theta L + \mu I \\ -\gamma I + \theta L + \varphi L + \mu L \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

Dari Persamaan (4.21) dan (4.22) akan dibentuk matriks jacobian sebagai berikut:

$$J(F) = \begin{bmatrix} 0 & \beta SI & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

$$J(V) = \begin{bmatrix} \sigma + \eta + \mu & 0 & 0 \\ -\eta & \gamma + \mu & -\theta \\ 0 & -\gamma & \theta + \varphi + \mu \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Substitusikan kesetimbangan bebas rumor kedalam persamaan (4.23) dan (4.24) sehingga diperoleh

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \beta S^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \sigma + \eta + \mu & 0 & 0 \\ -\eta & \gamma + \mu & -\theta \\ 0 & -\gamma & \theta + \varphi + \mu \end{bmatrix}$$

Akan ditentukan invers matriks V yaitu

$$V^{-1} = \frac{1}{\det(V)} \text{adj}(V)$$

Untuk mencari nilai V^{-1} diperlukan nilai determinan dan adjoin dari matriks V

$$\text{Det}(V) = (\sigma + \eta + \mu)(\gamma + \mu)(\theta + \varphi + \mu) - (\sigma + \eta + \mu)(-\theta)(-\gamma)$$

$$\Leftrightarrow (\sigma\gamma + \eta\gamma + \mu\gamma + \sigma\mu + \eta\mu + \mu\mu)(\theta + \varphi + \mu) - \sigma\theta\gamma - \eta\theta\gamma - \mu\theta\gamma$$

$$\Leftrightarrow \sigma\theta\mu + \eta\theta\mu + \theta\mu\mu + \sigma\varphi\gamma + \eta\varphi\gamma + \mu\varphi\gamma + \sigma\varphi\mu + \eta\varphi\mu + \mu\varphi\mu + \sigma\gamma\mu + \eta\gamma\mu + \mu\gamma\mu + \sigma\mu\mu + \eta\mu\mu + \mu\mu\mu$$

$$\Leftrightarrow (\sigma + \eta + \mu)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)$$

Akan ditentukan kofaktor matriks V yaitu

$$\text{Kof}(V) =$$

$$\begin{bmatrix} (\gamma + \mu)(\theta + \varphi + \mu) - \gamma\theta & \eta(\theta + \varphi + \mu) & \eta\gamma \\ 0 & (\sigma + \eta + \mu)(\theta + \varphi + \mu) & (\sigma + \eta + \mu)\gamma \\ 0 & \theta(\sigma + \eta + \mu) & (\sigma + \eta + \mu)(\gamma + \mu) \end{bmatrix}$$

Adjoin matriks V diperoleh dengan transpose kofaktor V

$$\text{Adj } V = (\text{Kof}(V))^T =$$

$$\begin{bmatrix} (\gamma + \mu)(\theta + \varphi + \mu) - \gamma\theta & 0 & 0 \\ \eta(\theta + \varphi + \mu) & (\sigma + \eta + \mu)(\theta + \varphi + \mu) & \theta(\sigma + \eta + \mu) \\ \eta\gamma & \gamma(\sigma + \eta + \mu) & (\sigma + \eta + \mu)(\gamma + \mu) \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$V^{-1} = \frac{1}{(\sigma + \eta + \mu)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)}$$

$$\begin{bmatrix} (\gamma + \mu)(\theta + \varphi + \mu) - \gamma\theta & 0 & 0 \\ \eta(\theta + \varphi + \mu) & (\sigma + \eta + \mu)(\theta + \varphi + \mu) & \theta(\sigma + \eta + \mu) \\ \eta\gamma & \gamma(\sigma + \eta + \mu) & (\sigma + \eta + \mu)(\gamma + \mu) \end{bmatrix}$$

\leftrightarrow

$$\begin{bmatrix} \frac{(\gamma + \mu)(\theta + \varphi + \mu) - \gamma\theta}{(\sigma + \eta + \mu)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)} & 0 & 0 \\ \frac{\eta(\theta + \varphi + \mu)}{(\sigma + \eta + \mu)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)} & \frac{(\sigma + \eta + \mu)(\theta + \varphi + \mu)}{(\sigma + \eta + \mu)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)} & \frac{\theta(\sigma + \eta + \mu)}{(\sigma + \eta + \mu)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)} \\ \frac{\eta\gamma}{(\sigma + \eta + \mu)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)} & \frac{\gamma(\sigma + \eta + \mu)}{(\sigma + \eta + \mu)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)} & \frac{(\sigma + \eta + \mu)(\gamma + \mu)}{(\sigma + \eta + \mu)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya ditentukan matriks next generation sebagai

berikut:

$$K = FV^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \beta S^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{(\gamma + \mu)(\theta + \varphi + \mu) - \gamma\theta}{(\sigma + \eta + \mu)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)} & 0 & 0 \\ \frac{\eta(\theta + \varphi + \mu)}{(\sigma + \eta + \mu)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)} & \frac{(\sigma + \eta + \mu)(\theta + \varphi + \mu)}{(\sigma + \eta + \mu)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)} & \frac{\theta(\sigma + \eta + \mu)}{(\sigma + \eta + \mu)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)} \\ \frac{\eta\gamma}{(\sigma + \eta + \mu)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)} & \frac{\gamma(\sigma + \eta + \mu)}{(\sigma + \eta + \mu)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)} & \frac{(\sigma + \eta + \mu)(\gamma + \mu)}{(\sigma + \eta + \mu)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)} \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\eta\beta S(\theta + \varphi + \mu)}{(\sigma + \eta + \mu)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)} & \frac{\beta S(\theta + \varphi + \mu)}{(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)} & \frac{\beta\theta S}{(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Akan ditentukan nilai eigen dari matriks K sehingga:

$$\rho(K) = \det[K - \lambda I] = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} \frac{\eta\beta S(\theta+\varphi+\mu)}{(\sigma+\eta+\mu)(\varphi\gamma+\varphi\mu+\theta\mu+\gamma\mu+\mu^2)} & \frac{\beta S(\theta+\varphi+\mu)}{(\varphi\gamma+\varphi\mu+\theta\mu+\gamma\mu+\mu^2)} & \frac{\beta\theta S}{(\varphi\gamma+\varphi\mu+\theta\mu+\gamma\mu+\mu^2)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left[\begin{bmatrix} \frac{\eta\beta S(\theta+\varphi+\mu)}{(\sigma+\eta+\mu)(\varphi\gamma+\varphi\mu+\theta\mu+\gamma\mu+\mu^2)} - \lambda & \frac{\beta S(\theta+\varphi+\mu)}{(\varphi\gamma+\varphi\mu+\theta\mu+\gamma\mu+\mu^2)} & \frac{\beta\theta S}{(\varphi\gamma+\varphi\mu+\theta\mu+\gamma\mu+\mu^2)} \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\eta\beta S(\theta+\varphi+\mu)}{(\sigma+\eta+\mu)(\varphi\gamma+\varphi\mu+\theta\mu+\gamma\mu+\mu^2)} - \lambda \right) (-\lambda)(-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\eta\beta S(\theta+\varphi+\mu)}{(\sigma+\eta+\mu)(\varphi\gamma+\varphi\mu+\theta\mu+\gamma\mu+\mu^2)} - \lambda \right) \lambda^2 = 0 \quad (4.25)$$

Dari persamaan (4.25) diperoleh

$$\lambda^2 = 0 \text{ dan} \quad (4.26)$$

$$\lambda = \frac{\eta\beta S(\theta+\varphi+\mu)}{(\sigma+\eta+\mu)(\varphi\gamma+\varphi\mu+\theta\mu+\gamma\mu+\mu^2)} \quad (4.27)$$

Substitusikan $S = N$ ke persamaan (4.27) maka diperoleh angka reproduksi dasar

$$R_0 = \frac{\eta\beta N(\theta+\varphi+\mu)}{(\sigma+\eta+\mu)(\varphi\gamma+\varphi\mu+\theta\mu+\gamma\mu+\mu^2)} \quad (4.28)$$

4. Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan

Dalam menentukan kestabilan titik kesetimbangan dilakukan linearisasi pada sistem persamaan (4.8) dengan menentukan matriks Jacobian di titik kesetimbangan. Selanjutnya ditentukan nilai eigen dari matriks dengan menggunakan definisi polinomial karakteristik dan kemudian

menentukan sifat kestabilannya. Matriks jacobian dari persamaan (4.8) adalah sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -\beta I - \mu & 0 & -\beta S & 0 \\ \beta I & -(\sigma + \eta + \mu) & \beta S & 0 \\ 0 & \eta & -(\gamma + \mu) & \theta \\ 0 & 0 & \gamma & -(\theta + \mu + \varphi) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

a. Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Rumor

Untuk mencari kestabilan titik kesetimbangan bebas rumor substitusikan $P^0 = (N, 0, 0, 0)$ kedalam persamaan (4.28)

$$J(P^0) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\beta N & 0 \\ 0 & -(\sigma + \eta + \mu) & \beta N & 0 \\ 0 & \eta & -(\gamma + \mu) & \theta \\ 0 & 0 & \gamma & -(\theta + \mu + \varphi) \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari matriks di atas adalah:

$$\text{Det} (\lambda I - J(P^0)) = 0$$

$$\text{Det} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\beta N & 0 \\ 0 & -(\sigma + \eta + \mu) & \beta N & 0 \\ 0 & \eta & -(\gamma + \mu) & \theta \\ 0 & 0 & \gamma & -(\theta + \mu + \varphi) \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{Det} \begin{bmatrix} \lambda + \mu & 0 & \beta N & 0 \\ 0 & \lambda + (\sigma + \eta + \mu) & -\beta N & 0 \\ 0 & -\eta & \lambda + (\gamma + \mu) & -\theta \\ 0 & 0 & -\gamma & \lambda + (\theta + \mu + \varphi) \end{bmatrix} = 0$$

Dapat disederhanakan menjadi

$$\text{Det} \begin{bmatrix} \lambda + \mu & 0 & \beta N & 0 \\ 0 & \lambda + a_1 & -\beta N & 0 \\ 0 & -\eta & \lambda + a_2 & -\theta \\ 0 & 0 & -\gamma & \lambda + a_3 \end{bmatrix} = 0$$

Dengan

$$a_1 = \sigma + \eta + \mu,$$

$$a_2 = \gamma + \mu,$$

$$a_3 = \theta + \mu + \varphi.$$

$$(\lambda + \mu) \begin{bmatrix} \lambda + a_1 & -\beta N & 0 \\ -\eta & \lambda + a_2 & -\theta \\ 0 & -\gamma & \lambda + a_3 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 0 & -\beta N & 0 \\ 0 & \lambda + a_2 & -\theta \\ 0 & -\gamma & \lambda + a_3 \end{bmatrix}$$

$$+ \beta N \begin{bmatrix} 0 & \lambda + a_1 & 0 \\ 0 & -\eta & -\theta \\ 0 & 0 & \lambda + a_3 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 0 & \lambda + a_1 & -\beta N \\ 0 & -\eta & \lambda + a_2 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda + \mu) \begin{bmatrix} \lambda + a_1 & -\beta N & 0 \\ -\eta & \lambda + a_2 & -\theta \\ 0 & -\gamma & \lambda + a_3 \end{bmatrix} - 0 + 0 - 0 = 0$$

$$(\lambda + \mu)[(\lambda + a_1)(\lambda + a_2)(\lambda + a_3) - (-\beta N)(-\eta)(\lambda + a_3) - (\lambda + a_1)(-\theta)(-\gamma)] = 0$$

$$(\lambda + \mu)[\lambda^3 + (a_1 + a_2 + a_3)\lambda^2 + (a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 - \gamma\theta - \eta\beta N)\lambda + a_1a_2a_3 - a_1\gamma\theta - a_3\eta\beta N] = 0$$

Dapat disederhanakan menjadi

$$(\lambda + \mu)[\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3] = 0 \quad (4.29)$$

Dengan

$$b_1 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$b_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 - \gamma\theta - \eta\beta N$$

$$b_3 = a_1a_2a_3 - a_1\gamma\theta - a_3\eta\beta N$$

Dari persamaan (4.29) Diperoleh $\lambda = -\mu$ dan

$$\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0 \quad (4.30)$$

Untuk menentukan nilai akar karakteristik dari persamaan (4.30) akan digunakan kriteria Routh Hurwitz. Dalam Kriteria Routh Hurwitz terdapat beberapa syarat yang harus terpenuhi agar titik kesetimbangan bebas rumor stabil asimtotik lokal, yaitu memenuhi syarat-syarat berikut:

- i. $H_1 = |b_1| > 0$
- ii. $H_2 = \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ 1 & b_2 \end{bmatrix} > 0$
- iii. $H_3 = \begin{bmatrix} b_1 & b_3 & 0 \\ 1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{bmatrix} > 0$

Akan ditentukan $H_1 = |b_1| > 0$

$$H_1 = |b_1| = a_1 + a_2 + a_3 > 0$$

Jelas bahwa nilai $H_1 = a_1 + a_2 + a_3 > 0$

Selanjutnya akan dijelaskan $H_2 = \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ 1 & b_2 \end{bmatrix} > 0$

$$H_2 = \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ 1 & b_2 \end{bmatrix} = b_1b_2 - b_3$$

$$\leftrightarrow (a_1 + a_2 + a_3) b_2 - (a_1a_2a_3 - a_1\gamma\theta - a_3\eta\beta N)$$

$$\leftrightarrow a_1(b_2 - a_2a_3 + \gamma\theta) + a_2b_2 + a_3(b_2 + \eta\beta N)$$

Jika $R_0 < 1$ maka

$$b_2 - a_2a_3 + \gamma\theta = a_1a_2 + a_1a_3 - \eta\beta N$$

$$\leftrightarrow (\sigma + \eta + \mu)(\gamma + \mu) + (\sigma + \eta + \mu)(\theta + \mu + \varphi) - \eta\beta N$$

$$\leftrightarrow (\sigma + \eta + \mu)(\gamma + \mu + \theta + \mu + \varphi) - \eta\beta N$$

$$\begin{aligned}
&\leftrightarrow (\sigma + \eta + \mu)(\gamma + 2\mu + \theta + \varphi) - \eta\beta N \\
&\leftrightarrow (\sigma + \eta + \mu)(\gamma + 2\mu + \theta + \varphi) - \frac{R_0(\sigma + \eta + \mu)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)}{\theta + \mu + \varphi} \\
&\leftrightarrow \frac{(\sigma + \eta + \mu)(\gamma + 2\mu + \theta + \varphi)(\theta + \mu + \varphi) - R_0(\sigma + \eta + \mu)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)}{\theta + \mu + \varphi} \\
&\leftrightarrow \frac{(\sigma + \eta + \mu)}{\theta + \mu + \varphi} ((1 - R_0)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2) + (\gamma\theta + \mu^2 + 2\varphi\mu + \theta^2 + \theta\mu + 2\theta\varphi + \varphi^2)) > 0 \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned}
&(a_2a_3 - \gamma\theta) = (\gamma + \mu)(\theta + \mu + \varphi) - \gamma\theta \\
&\leftrightarrow \gamma\theta + \gamma\mu + \gamma\varphi + \mu(\theta + \mu + \varphi) - \gamma\theta \\
&\leftrightarrow \gamma\mu + \gamma\varphi + \mu(\theta + \mu + \varphi) > 0
\end{aligned}$$

Sehingga $(a_2a_3 - \gamma\theta) > 0$

Dari (4.31) diketahui bahwa $b_2 - a_2a_3 + \gamma\theta > 0$

$$\begin{aligned}
\text{Jadi } b_2 &= b_2 - a_2a_3 + \gamma\theta + (a_2a_3 - \gamma\theta) > b_2 - a_2a_3 + \gamma\theta > \\
&0
\end{aligned}$$

Dari penjelasan diatas dapat diketahui bahwa $H_2 > 0$ jika $R_0 < 1$.

$$\text{Berikut penjelasan } H_3 = \begin{bmatrix} b_1 & b_3 & 0 \\ 1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{bmatrix} > 0$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} b_1 & b_3 & 0 \\ 1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{bmatrix} = b_1b_2b_3 - b_3b_3 = b_3(b_1b_2 - b_3) = b_3H_2$$

$$\begin{aligned}
b_3 &= a_1a_2a_3 - a_1\gamma\theta - a_3\eta\beta N \\
&= (\sigma + \eta + \mu)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2) - \eta\beta N(\theta + \mu + \varphi) \\
&= (\sigma + \eta + \mu)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{R_0(\sigma+\eta+\mu)(\varphi\gamma+\varphi\mu+\theta\mu+\gamma\mu+\mu^2)}{\theta+\mu+\varphi}(\theta+\mu+\varphi) \\
&= (\sigma+\eta+\mu)(\varphi\gamma+\varphi\mu+\theta\mu+\gamma\mu+\mu^2) - R_0(\sigma+\eta+\mu)(\varphi\gamma+\varphi\mu+\theta\mu+\gamma\mu+\mu^2) \\
&= (1-R_0)(\sigma+\eta+\mu)(\varphi\gamma+\varphi\mu+\theta\mu+\gamma\mu+\mu^2) > 0
\end{aligned}$$

Dari formula sebelumnya diperoleh $b_3 > 0$ jika dan hanya jika $R_0 < 1$. Dengan demikian terbukti bahwa $H_3 > 0$.

Menurut kriteria hurwitz akar persamaan tersebut berupa bilangan real negatif, dengan $H_1, H_2, H_3 > 0$. Dengan teori kestabilan maka ketika $R_0 < 1$ sistem akan stabil asimtotik lokal pada P^0 . Begitupun sebaliknya, jika $R_0 > 1$ maka kesetimbangan bebas rumor P^0 tidak stabil.

b. Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik

Untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan endemik rumor substitusikan $P^* = (S^*, D^*, I^*, L^*)$ kedalam persamaan (4.28).

$$J(P^*) = \begin{bmatrix} -\beta I^* - \mu & 0 & -\beta S^* & 0 \\ \beta I^* & -(\sigma + \eta + \mu) & \beta S^* & 0 \\ 0 & \eta & -(\gamma + \mu) & \theta \\ 0 & 0 & \gamma & -(\theta + \mu + \varphi) \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari matriks di atas adalah:

$$\text{Det}(\lambda I - J(P^*)) = 0$$

$$\text{Det} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} -\beta I^* - \mu & 0 & -\beta S^* & 0 \\ \beta I^* & -(\sigma + \eta + \mu) & \beta S^* & 0 \\ 0 & \eta & -(\gamma + \mu) & \theta \\ 0 & 0 & \gamma & -(\theta + \mu + \varphi) \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{Det} \begin{bmatrix} \lambda + (\beta I^* + \mu) & 0 & \beta S^* & 0 \\ -\beta I^* & \lambda + (\sigma + \eta + \mu) & -\beta S^* & 0 \\ 0 & -\eta & \lambda + (\gamma + \mu) & -\theta \\ 0 & 0 & -\gamma & \lambda + (\theta + \mu + \varphi) \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda + (\beta I^* + \mu) \begin{bmatrix} \lambda + (\sigma + \eta + \mu) & -\beta S^* & 0 \\ -\eta & \lambda + (\gamma + \mu) & -\theta \\ 0 & -\gamma & \lambda + (\theta + \mu + \varphi) \end{bmatrix}$$

$$-0 \begin{bmatrix} -\beta I^* & -\beta S^* & 0 \\ 0 & \lambda + (\gamma + \mu) & -\theta \\ 0 & -\gamma & \lambda + (\theta + \mu + \varphi) \end{bmatrix}$$

$$\beta S^* \begin{bmatrix} -\beta I^* & \lambda + (\sigma + \eta + \mu) & 0 \\ 0 & -\eta & -\theta \\ 0 & 0 & \lambda + (\theta + \mu + \varphi) \end{bmatrix}$$

$$-0 \begin{bmatrix} -\beta I^* & \lambda + (\sigma + \eta + \mu) & -\beta S^* \\ 0 & -\eta & \lambda + (\gamma + \mu) \\ 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda + (\beta I^* + \mu)[(\lambda + (\sigma + \eta + \mu))(\lambda + (\gamma + \mu))(\lambda + (\theta + \mu + \varphi)) + \beta S^*(-\eta)(\lambda + (\theta + \mu + \varphi)) - (\lambda + (\sigma + \eta + \mu))(-\theta)(-\gamma)] + \beta S^*[(-\beta I^*)(-\eta)(\lambda + (\theta + \mu + \varphi))] = 0$$

Persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi

$$(\lambda + (\beta I^* + \mu))[(\lambda + a_1)(\lambda + a_2)(\lambda + a_3) - \beta S^* \eta (\lambda + a_3) - (\lambda + a_1)(\theta \gamma)] + \beta S^*[(\beta I^* \eta)(\lambda + a_3)] = 0$$

$$(\lambda + \beta I^* + \mu)(\lambda + a_1)(\lambda + a_2)(\lambda + a_3) - (\lambda + \beta I^* + \mu)\beta S^* \eta (\lambda + a_3) - (\lambda + \beta I^* + \mu)(\lambda + a_1)(\theta \gamma) + \beta S^*(\beta I^* \eta)(\lambda + a_3) = 0$$

dengan

$$a_1 = \sigma + \eta + \mu,$$

$$a_2 = \gamma + \mu,$$

$$a_3 = \theta + \mu + \varphi.$$

$$\begin{aligned} &\lambda^4 + [(a_1 + a_2 + a_3) + (\beta I^* + \mu)]\lambda^3 + [(a_1 a_2 + a_1 a_3 + \\ &a_2 a_3 - \gamma\theta) + (a_1 + a_2 + a_3)(\beta I^* + \mu) - \eta\beta S^*]\lambda^2 + \\ &[(a_1 a_2 a_3 - a_1 \gamma\theta) + (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 - \gamma\theta)(\beta I^* + \mu) - \\ &(a_3 + \mu)\eta\beta S^*]\lambda + [(a_1 a_2 a_3 - a_1 \gamma\theta)(\beta I^* + \mu) - a_3 \mu \eta \beta S^*] = \\ &0 \end{aligned}$$

dapat disederhanakan menjadi

$$\lambda^4 + c_1 \lambda^3 + c_2 \lambda^2 + c_3 \lambda + c_4 = 0 \quad (4.32)$$

dengan

$$c_1 = (a_1 + a_2 + a_3) + (\beta I^* + \mu)$$

$$c_2 = (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 - \gamma\theta) + (a_1 + a_2 + a_3)(\beta I^* + \mu) - \eta\beta S^*$$

$$c_3 = (a_1 a_2 a_3 - a_1 \gamma\theta) + (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 - \gamma\theta)(\beta I^* + \mu) - (a_3 + \mu)\eta\beta S^*$$

$$c_4 = (a_1 a_2 a_3 - a_1 \gamma\theta)(\beta I^* + \mu) - a_3 \mu \eta \beta S^*$$

Untuk menentukan akar dari persamaan (4.32) akan digunakan kriteria Routh Hurwitz. Menurut Kriteria Routh Hurwitz titik kesetimbangan endemik akan stabil asimtotik lokal jika memenuhi syarat-syarat berikut:

$$\text{i. } H_1 = |c_1| > 0$$

$$\text{ii. } H_2 = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 \\ 1 & c_2 \end{bmatrix} > 0$$

$$\text{iii. } H_3 = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 & 0 \\ 1 & c_2 & c_4 \\ 0 & c_1 & c_3 \end{bmatrix} > 0$$

$$\text{iv. } H_4 = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 & 0 & 0 \\ 1 & c_2 & c_4 & 0 \\ 0 & c_1 & c_3 & 0 \\ 0 & 1 & c_2 & c_4 \end{bmatrix} > 0$$

Akan dijelaskan $H_1 = |c_1| > 0$

$$H_1 = |c_1| = a_1 + a_2 + a_3 + (\beta I^* + \mu) > 0$$

Selanjutnya akan dijelaskan $H_2 = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 \\ 1 & c_2 \end{bmatrix} > 0$

$$H_2 = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 \\ 1 & c_2 \end{bmatrix} = c_1 c_2 - c_3$$

$$\begin{aligned} &= [(a_1 + a_2 + a_3 + (\beta I^* + \mu))((a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 - \gamma \theta) + \\ &\quad (a_1 + a_2 + a_3)(\beta I^* + \mu) \\ &\quad - \eta \beta S^*)] - [(a_1 a_2 a_3 - a_1 \gamma \theta) + (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 - \\ &\quad \gamma \theta)(\beta I^* + \mu) - (a_3 + \mu) \eta \beta S^*] \\ &= [(a_1 + a_2 + a_3 + (\beta I^* + \mu)) (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 - \gamma \theta) + \\ &\quad (a_1 + a_2 + a_3 + (\beta I^* + \mu)) (a_1 + a_2 + a_3)(\beta I^* + \mu) - (a_1 + \\ &\quad a_2 + a_3 + (\beta I^* + \mu)) \frac{a_1(a_2 a_3 - \gamma \theta)}{a_3}] - [(a_1 a_2 a_3 - a_1 \gamma \theta) + \\ &\quad (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 - \gamma \theta)(\beta I^* + \mu) - (a_3 + \mu) \frac{a_1(a_2 a_3 - \gamma \theta)}{a_3}] \\ &= [a_1^2(a_2 + a_3 + \beta I^* + \mu) + a_1(a_2 + a_3 + \beta I^* + \mu)^2 - \\ &\quad a_1 a_2(a_1 + a_2 + \beta I^*)] + (a_1 + a_2 + \beta I^*) \frac{a_1 \gamma \theta}{a_3} + (a_2 + \\ &\quad a_3)[(a_3 + \beta I^* + \mu)(a_2 + \beta I^* + \mu) - \gamma \theta] \\ &= a_1^2 a_3 + a_1^2 \beta I^* + a_1^2 \mu + a_1 a_3^2 + a_1 \beta I^* + a_1 \mu^2 + 2a_1 a_2 a_3 + \\ &\quad 2a_1 a_3 \beta I^* + 2a_1 \mu \beta I^* + a_1 a_2 \beta I^* + 2a_1 a_2 \mu + 2a_1 a_3 \mu + \end{aligned}$$

$$(a_1 + a_2 + \beta I^*) \frac{a_1 \gamma \theta}{a_3} + (a_1 a_2 - \gamma \theta) + a_3 \beta I^* + a_3 \mu +$$

$$a_2 \beta I^* + \beta I^{*2} + \mu \beta I^* + a_2 \mu + \mu \beta I^* + \mu^2 > 0$$

Penjelasan diatas menunjukkan bahwa $H_2 > 0$

$$\text{Akan dijelaskan bahwa } H_3 = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 & 0 \\ 1 & c_2 & c_4 \\ 0 & c_1 & c_3 \end{bmatrix} > 0$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 & 0 \\ 1 & c_2 & c_4 \\ 0 & c_1 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$= c_1 c_2 c_3 - c_3^2 - c_1^2 c_4$$

Dipunyai

$$R_0 = \frac{\eta \beta N (\theta + \mu + \varphi)}{(\sigma + \eta + \mu)(\varphi \gamma + \varphi \mu + \theta \mu + \gamma \mu + \mu^2)}$$

$$\Leftrightarrow \eta \beta = \frac{R_0 (\sigma + \eta + \mu)(\varphi \gamma + \varphi \mu + \theta \mu + \gamma \mu + \mu^2)}{N (\theta + \mu + \varphi)}$$

$$\Leftrightarrow \eta \beta = \frac{R_0 a_1 (a_2 a_3 - \gamma \theta)}{N a_3} \quad (4.34)$$

Dan

$$S^* = \frac{(\sigma + \eta + \mu)(\varphi \gamma + \varphi \mu + \theta \mu + \gamma \mu + \mu^2)}{\eta \beta (\theta + \mu + \varphi)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1 (a_2 a_3 - \gamma \theta)}{\eta \beta a_3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1 (a_2 a_3 - \gamma \theta)}{\frac{R_0 a_1 (a_2 a_3 - \gamma \theta)}{N a_3} a_3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1 (a_2 a_3 - \gamma \theta)}{a_3} \chi \frac{N a_3}{R_0 a_1 (a_2 a_3 - \gamma \theta)}$$

$$S^* = \frac{N}{R_0} \quad (4.35)$$

Substitusikan persamaan (4.33) kedalam $\eta \beta S$

$$\eta\beta S = \eta\beta \frac{a_1(a_2a_3 - \gamma\theta)}{\eta\beta a_3}$$

$$\eta\beta S = \frac{a_1(a_2a_3 - \gamma\theta)}{a_3}$$

$$\text{Diperoleh } \eta\beta S^* = \frac{a_1(a_2a_3 - \gamma\theta)}{a_3} \quad (4.36)$$

Dipunyai

$$I^* = \frac{\mu(N-S)}{\beta S^*}$$

$$\leftrightarrow \beta I^* = \frac{\mu(N-S)}{S^*}$$

$$\leftrightarrow \beta I^* = \frac{\mu\left(N - \frac{N}{R_0}\right)}{\frac{N}{R_0}}$$

$$\leftrightarrow \beta I^* = \mu(R_0 - 1) \quad (4.37)$$

Substitusikan persamaan (4.34) – (4.37) kedalam persamaan berikut

$$\begin{aligned} H_3 &= c_1c_2c_3 - c_3^2 - c_1^2c_4 \\ &= ((a_1 + a_2 + a_3) + (\beta I^* + \mu))((a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 - \gamma\theta) + \\ &\quad (a_1 + a_2 + a_3)(\beta I^* + \mu) - \eta\beta S^*)((a_1a_2a_3 - a_1\gamma\theta) + \\ &\quad (a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 - \gamma\theta)(\beta I^* + \mu) - (a_3 + \mu)\eta\beta S^*) - \\ &\quad ((a_1a_2a_3 - a_1\gamma\theta) + (a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 - \gamma\theta)(\beta I^* + \\ &\quad \mu) - (a_3 + \mu)\eta\beta S^*)^2 - ((a_1 + a_2 + a_3) + (\beta I^* + \\ &\quad \mu))^2 (a_1a_2a_3 - a_1\gamma\theta) (\beta I^* + \mu) - a_3\mu\eta\beta S^* \end{aligned}$$

Persamaan diatas dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} &= (T_1 + \mu R_0) \left(T_2 + T_1\mu R_0 - \frac{T_3}{a_3} \right) \left(T_2\mu R_0 - \frac{T_3\mu}{a_3} \right) - \left(T_2\mu R_0 - \frac{T_3\mu}{a_3} \right)^2 \\ &\quad - (T_1 + \mu R_0)^2 (T_3\mu R_0 - T_3\mu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu^3(T_1T_2 - T_3)R_0^3 + \left[\mu^3 \left(T_3 + \frac{T_1T_3}{a_3} \right) + \mu^2 \left(T_1^2T_2 - \frac{T_2T_3}{a_3} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 2T_1T_3 \right) \right] R_0^2 + \left[\mu^2 \left(\frac{T_3^2}{a_3^2} + \frac{T_2T_3}{a_3} + 2T_1T_3 - \frac{T_1^2T_3}{a_3} \right) + \mu \left(T_1T_2^2 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{T_1T_2T_3}{a_3} - T_1^2T_3 \right) \right] R_0 + \left[-\frac{\mu^2T_3^2}{a_3^2} + \mu \left(T_1^2T_3 - \frac{T_1T_2T_3}{a_3} + \frac{T_1T_3^2}{a_3^2} \right) \right] \\
H_3 &= \Delta_1R_0^3 + \Delta_2R_0^2 + \Delta_3R_0 + \Delta_4 \tag{4.38}
\end{aligned}$$

Dengan

$$T_1 = a_1 + a_2 + a_3 > 0$$

$$T_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + (a_2a_3 - \gamma\theta) > 0$$

$$T_3 = a_1(a_2a_3 - \gamma\theta) > 0$$

Dan

$$\Delta_1 = \mu^3(T_1T_2 - T_3),$$

$$\Delta_2 = \mu^3 \left(T_3 - \frac{(T_1T_3)}{a_3} \right) + \mu^2 \left(T_1^2T_2 - \frac{T_2T_3}{a_3} - 2T_1T_3 \right),$$

$$\Delta_3 = \mu^2 \left(\frac{T_3^2}{a_3^2} + \frac{T_2T_3}{a_3} + 2T_1T_3 - \frac{T_1^2T_3}{a_3} \right) + \mu \left(T_1T_2^2 - \frac{T_1T_2T_3}{a_3} - T_1^2T_3 \right),$$

$$\Delta_4 = -\mu^2 \frac{T_3^2}{a_3^2} + \mu \left(T_1^2T_3 - \frac{T_1T_2T_3}{a_3} + \frac{T_1T_3^2}{a_3^2} \right),$$

Untuk mencari akar dari persamaan (4.38) Maka kita bisa membuktikan

$$\Delta_1 > 0$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 > 0$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 > 0$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 > 0$$

Bukti untuk $\Delta_1 > 0$

$$\Delta_1 = \mu^3(T_1T_2 - T_3),$$

$$\begin{aligned}
&= \mu^3(a_1 + a_2 + a_3)[a_1a_2 + a_1a_3 + (a_2a_3 - \gamma\theta)] - \\
&\quad a_1(a_2a_3 - \gamma\theta) \\
&= \mu^3[a_1^2a_2 + a_2 + a_1^2a_3 + (a_2 + a_3)(a_1a_2 + a_1a_3 + \\
&\quad (a_2a_3 - \gamma\theta))] > 0
\end{aligned}$$

Bukti untuk $\Delta_1 + \Delta_2 > 0$

$$\begin{aligned}
\Delta_1 + \Delta_2 &= [\mu^3(T_1T_2 - T_3)] + [\mu^3\left(T_3 - \frac{(T_1T_3)}{a_3}\right) + \mu^2(T_1^2T_2 - \\
&\quad \frac{T_2T_3}{a_3} - 2T_1T_3)] \\
&= \frac{\mu^3}{a_3}(a_3T_1T_2 - T_1T_3) + \frac{\mu^2}{a_3}(a_3T_1^2T_2 - T_2T_3 - 2a_3T_1T_3) \\
&= \frac{\mu^3}{a_3}[a_3(a_1 + a_2 + a_3)(a_1a_2 + a_1a_3 + (a_2a_3 - \gamma\theta)) - (a_1 + \\
&\quad a_2 + a_3)(a_1(a_2a_3 - \gamma\theta))] + \frac{\mu^2}{a_3}(a_3(a_1 + a_2 + \\
&\quad a_3)^2(a_1a_2 + a_1a_3 + (a_2a_3 - \gamma\theta)) - (a_1a_2 + a_1a_3 + \\
&\quad (a_2a_3 - \gamma\theta))(a_1(a_2a_3 - \gamma\theta)) - 2a_3(a_1 + a_2 + \\
&\quad a_3)(a_1(a_2a_3 - \gamma\theta))) \\
&= \frac{\mu^3}{a_3}[a_1^2a_3^2 + a_1a_2a_3^2 + a_2a_3(a_2a_3 - \gamma\theta) + a_1a_2a_3^2 + a_1a_3^3 + \\
&\quad a_3^2(a_2a_3 - \gamma\theta) + a_1^2\gamma\theta + a_1a_2\gamma\theta] + \frac{\mu^2}{a_3}[a_1^3a_2a_3 + \\
&\quad a_1^3a_2^2 + a_1a_3^2a_3 + a_2^2a_3(a_2a_3 - \gamma\theta) + a_1a_2a_3^3 + \\
&\quad a_1a_3^4 + a_3^3(a_2a_3 - \gamma\theta) + 2a_1^2a_3\gamma\theta + 2a_1a_3^2\gamma\theta + \\
&\quad a_1^2a_2\gamma\theta + a_1\gamma\theta(2a_2a_3 - \gamma\theta)] > 0
\end{aligned}$$

dari penjelasan diatas jelas terbuktibahwa $\Delta_1 > 0$

Bukti untuk $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 > 0$

$$\begin{aligned}
\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 &= [\mu^3(T_1T_2 - T_3)] + [\mu^3\left(T_3 - \frac{(T_1T_3)}{a_3}\right) + \mu^2(T_1^2T_2 - \frac{T_2T_3}{a_3} - 2T_1T_3)] + \left[\mu^2\left(\frac{T_3^2}{a_3^2} + \frac{T_2T_3}{a_3} + 2T_1T_3 - \frac{T_1^2T_3}{a_3}\right) + \mu\left(T_1T_2^2 - \frac{T_1T_2T_3}{a_3} - T_1^2T_3\right)\right] \\
&= \frac{\mu^3}{a_3}[a_3T_1T_2 - T_1T_3] + \frac{\mu^2}{a_3^2}[a_3^2T_1T_2 + T_3^2 - a_3T_1^2T_3] + \frac{\mu}{a_3}[a_3T_1T_2^2 - T_1T_2T_3 - a_3T_1^2T_3] \\
&= \frac{\mu^3}{a_3}[a_3(a_1 + a_2 + a_3)(a_1a_2 + a_1a_3 + (a_2a_3 - \gamma\theta)) - (a_1 + a_2 + a_3)(a_1(a_2a_3 - \gamma\theta))] + \frac{\mu^2}{a_3^2}[a_3^2(a_1 + a_2 + a_3)^2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 - \gamma\theta) + (a_1a_2a_3 - a_1\gamma\theta)^2 - a_3(a_1 + a_2 + a_3)^2(a_1a_2a_3 - a_1\gamma\theta)] + \frac{\mu}{a_3}[a_3(a_1 + a_2 + a_3)(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 - \gamma\theta)^2 - (a_1 + a_2 + a_3)(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 - \gamma\theta)(a_1a_2a_3 - a_1\gamma\theta) - a_3(a_1 + a_2 + a_3)^2(a_1a_2a_3 - a_1\gamma\theta)] \\
&= \frac{\mu^3}{a_3}[a_1^2a_3^2 + a_1a_2a_3^2 + a_2a_3(a_2a_3 - \gamma\theta) + a_1a_2a_3^2 + a_1a_3^3 + a_3^2(a_2a_3 - \gamma\theta) + a_1^2\gamma\theta + a_1a_2\gamma\theta] + \frac{\mu^2}{a_3^2}[a_1^3a_3 + a_1^2a_3^2(a_2a_3 - \gamma\theta) + a_2^2a_3^2(a_2a_3 - \gamma\theta) + a_1a_2^2a_3^3 + 2a_1a_2a_3^2(a_2a_3 - \gamma\theta) + 2a_1^2a_2a_3^3 + 2a_1^2a_3^4 + a_1a_2a_3^4 + 2a_1a_3^3(a_2a_3 - \gamma\theta) + 2a_1a_2^2a_3^3 + 2a_2a_3^3(a_2a_3 - \gamma\theta) + a_1^2a_2^2a_3^2 + a_1^2\gamma^2\theta^2 + a_1^3a_3\gamma\theta + a_2^2a_3\gamma\theta + a_1a_3^3\gamma\theta + 2a_1^2a_3^2\gamma\theta + 2a_1a_2a_3^2\gamma\theta] + \frac{\mu}{a_3}[a_1^3a_3^3 + a_1^2a_2a_3^2 + a_1^2a_3^4 + a_2a_3(a_2^2a_3^2 - 2a_2a_3\gamma\theta + \gamma^2\theta^2) + a_3^2(a_2^2a_3^2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2a_2a_3\gamma\theta + \gamma^2\theta^2) + a_1^2a_2a_3^3 + 2a_1a_2a_3^2(a_2a_3 - \gamma\theta) + \\
& a_1a_3^3(a_2a_3 - \gamma\theta) + a_1^3a_2\gamma\theta + a_1^2a_2^2\gamma\theta + a_1^3a_3\gamma\theta + a_1^2a_3^2\gamma\theta + \\
& 2a_1^2a_2a_3\gamma\theta + a_1^2\gamma\theta(a_2a_3 - \gamma\theta) + a_1a_2\gamma\theta(a_2a_3 - \gamma\theta) + \\
& a_1^3a_3\gamma\theta + 2a_1^2a_2a_3\gamma\theta] > 0
\end{aligned}$$

Dari penjelasan diatas telah dibuktikan bahwa $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 > 0$

Bukti untuk $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 > 0$

$$\begin{aligned}
\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 &= [\mu^3(T_1T_2 - T_3)] + [\mu^3\left(T_3 - \frac{(T_1T_3)}{a_3}\right) + \\
& \mu^2(T_1^2T_2 - \frac{T_2T_3}{a_3} - 2T_1T_3)] + [\mu^2\left(\frac{T_3^2}{a_3^2} + \frac{T_2T_3}{a_3} + 2T_1T_3 - \right. \\
& \left. \frac{T_1^2T_3}{a_3}\right) + \mu\left(T_1T_2^2 - \frac{T_1T_2T_3}{a_3} - T_1^2T_3\right)] + [-\mu^2\frac{T_3^2}{a_3^2} + \\
& \mu\left(T_1^2T_3 - \frac{T_1T_2T_3}{a_3} + \frac{T_1T_3^2}{a_3^2}\right)] \\
&= \frac{\mu^3}{a_3}[a_3T_1T_2 - T_1T_3] + \frac{\mu^2}{a_3}[a_3T_1^2T_2 - T_1^2T_3] + \frac{\mu}{a_3^2}[a_3^2T_1T_2^2 - \\
& 2a_3T_1T_2T_3 + T_1T_3^2] \\
&= \frac{\mu^3}{a_3}[a_3(a_1 + a_2 + a_3)(a_1a_2 + a_1a_3 + (a_2a_3 - \gamma\theta)) - \\
& (a_1 + a_2 + a_3)(a_1(a_2a_3 - \gamma\theta))] + \frac{\mu^2}{a_3}[a_3(a_1 + a_2 + \\
& a_3)^2(a_1a_2 + a_1a_3 + (a_2a_3 - \gamma\theta)) - (a_1 + a_2 + \\
& a_3)^2(a_1(a_2a_3 - \gamma\theta))] + \frac{\mu}{a_3^2}[a_3^2(a_1 + a_2 + a_3)(a_1a_2 + \\
& a_1a_3 + (a_2a_3 - \gamma\theta))^2 - 2a_3(a_1 + a_2 + a_3)(a_1a_2 + \\
& a_1a_3 + (a_2a_3 - \gamma\theta))(a_1(a_2a_3 - \gamma\theta))] + (a_1 + a_2 + \\
& a_3)(a_1(a_2a_3 - \gamma\theta))^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu^3}{a_3} [a_1^2 a_3^2 + a_1 a_2 a_3^2 + a_2 a_3 (a_2 a_3 - \gamma \theta) + a_1 a_2 a_3^2 + a_1 a_3^2 + \\
&a_3^2 (a_2 a_3 - \gamma \theta) + a_1^2 \gamma \theta + a_1 a_2 \gamma \theta] + \frac{\mu^2}{a_3} [a_1^3 a_3^2 + a_1^2 a_2 a_3^2 + \\
&a_1 a_2^2 a_3^2 + a_2^2 a_3 (a_2 a_3 - \gamma \theta) + a_1 a_3^4 + a_3^3 (a_2 a_3 - \gamma \theta) + \\
&2a_1^2 a_2 a_3^2 + 2a_1^2 a_3^3 + a_1 a_3^2 (2a_1 a_3 - \gamma \theta) + 2a_1 a_2^2 a_3^2 + \\
&2a_1 a_2 a_3^3 + 2a_2 a_3^2 (a_2 a_3 - \gamma \theta) + a_1^3 \gamma \theta + a_1 a_2^2 \gamma \theta + 2a_1^2 a_2 \gamma \theta + \\
&a_1^2 a_3 \gamma \theta] + \frac{\mu}{a_3} [a_1^3 a_3^4 + a_1^2 a_2 a_3^4 + a_1^2 a_3^5 + a_1 a_3^2 (a_2^2 a_3^2 - \gamma^2 \theta^2) + \\
&a_2 a_3^2 (a_2^2 a_3^2 - 2a_2 a_3 \gamma \theta + \gamma^2 \theta^2) + a_3^2 (a_2^2 a_3^2 - 2a_2 a_3 \gamma \theta + \\
&\gamma^2 \theta^2) + 2a_1 a_2 a_3^3 (a_2 a_3 - \gamma \theta) + 2a_1^2 a_3^3 (a_2 a_3 - \gamma \theta) + \\
&2a_1 a_3^4 (a_2 a_3 - \gamma \theta) + 2a_1^2 a_3 \gamma \theta (a_2 a_3 - \gamma \theta) + 2a_1^3 a_2^2 \gamma \theta + \\
&2a_1 a_2 a_3 \gamma \theta (a_2 a_3 - \gamma \theta) + 2a_1^2 a_2 a_3^2 \gamma \theta + 2a_1^2 a_3^3 \gamma \theta + a_1^3 \gamma^2 \theta^2 + \\
&a_1^2 a_2 \gamma^2 \theta^2] > 0
\end{aligned}$$

Dengan

$$\begin{aligned}
&a_2 a_3 - \gamma \theta = (\gamma + \mu)(\theta + \mu + \varphi) - \gamma \theta \\
&= \gamma \theta + \gamma \mu + \gamma \varphi + \mu(\theta + \mu + \varphi) - \gamma \theta \\
&= \gamma \mu + \gamma \varphi + \mu(\theta + \mu + \varphi) > 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a_2^2 a_3^2 - \gamma^2 \theta^2 = (\gamma + \mu)^2 (\theta + \mu + \varphi)^2 - \gamma^2 \theta^2 \\
&= (\gamma^2 + \mu^2 + 2\gamma\mu)(\theta^2 + \mu^2 + \varphi^2 + 2\theta\mu + 2\theta\varphi + \\
&2\mu\varphi) - \gamma^2 \theta^2 \\
&= \gamma^2 \theta^2 + \gamma^2 \mu^2 + \gamma^2 \varphi^2 + 2\gamma^2 \theta\mu + 2\gamma^2 \theta\varphi + 2\gamma^2 \mu\varphi + \\
&\mu^2 \theta^2 + \mu^4 + \mu^2 \varphi^2 + 2\mu^3 \theta + 2\mu^2 \theta\varphi + 2\mu^3 \varphi + \\
&2\theta^2 \gamma\mu + 2\mu^3 \gamma + 2\varphi^2 \gamma\mu + 4\mu^2 \gamma\theta + 4\gamma\mu\theta\varphi + 4\mu^2 \gamma\varphi - \\
&\gamma^2 \theta^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \gamma^2\mu^2 + \gamma^2\varphi^2 + 2\gamma^2\theta\mu + 2\gamma^2\theta\varphi + 2\gamma^2\mu\varphi + \mu^2\theta^2 + \\
&\mu^4 + \mu^2\varphi^2 + 2\mu^3\theta + 2\mu^2\theta\varphi + 2\mu^3\varphi + 2\theta^2\gamma\mu + \\
&2\mu^3\gamma + 2\varphi^2\gamma\mu + 4\mu^2\gamma\theta + 4\gamma\mu\theta\varphi + 4\mu^2\gamma\varphi > 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a_2^2a_3^2 - 2a_2a_3\gamma\theta + \gamma^2\theta^2 = (\gamma + \mu)^2(\theta + \mu + \varphi)^2 - \\
&2(\gamma\theta + \gamma\mu + \gamma\varphi + \mu\theta + \mu^2 + \mu\varphi)\gamma\theta + \gamma^2\theta^2 \\
&= (\gamma^2 + \mu^2 + 2\gamma\mu)(\theta^2 + \mu^2 + \varphi^2 + 2\theta\mu + 2\theta\varphi + \\
&2\mu\varphi) + \gamma^2\theta^2 \\
&= \gamma^2\theta^2 + \gamma^2\mu^2 + \gamma^2\varphi^2 + 2\gamma^2\theta\mu + 2\gamma^2\theta\varphi + 2\gamma^2\mu\varphi + \\
&\mu^2\theta^2 + \mu^4 + \mu^2\varphi^2 + 2\mu^3\theta + 2\mu^2\theta\varphi + 2\mu^3\varphi + \\
&2\theta^2\gamma\mu + 2\mu^3\gamma + 2\varphi^2\gamma\mu + 4\mu^2\gamma\theta + 4\gamma\mu\theta\varphi + 4\mu^2\gamma\varphi - \\
&2\gamma^2\theta^2 - 2\gamma^2\theta\mu - 2\gamma^2\theta\varphi - 2\gamma\mu\theta^2 - 2\gamma\theta\mu^2 - \\
&2\gamma\theta\mu\varphi + \gamma^2\theta^2 \\
&= \gamma^2\mu^2 + \gamma^2\varphi^2 + 2\gamma^2\mu\varphi + \mu^2\theta^2 + \mu^4 + \mu^2\varphi^2 + \\
&2\mu^3\theta + 2\mu^2\theta\varphi + 2\mu^3\varphi + 2\mu^3\gamma + 2\varphi^2\gamma\mu + 2\mu^2\gamma\theta + \\
&2\gamma\mu\theta\varphi + 4\mu^2\gamma\varphi + \gamma^2\theta^2 > 0
\end{aligned}$$

Jelas bahwa $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 > 0$

Diperoleh $\Delta_1 > 0$; $\Delta_1 + \Delta_2 > 0$; $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 > 0$; $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 > 0$ sehingga $H_3 > 0$

Berikut akan dijelaskan $H_4 = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 & 0 & 0 \\ 1 & c_2 & c_4 & 0 \\ 0 & c_1 & c_3 & 0 \\ 0 & 1 & c_2 & c_4 \end{bmatrix} > 0$

$$\begin{aligned}
H_4 &= \begin{vmatrix} c_1 & c_3 & 0 & 0 \\ 1 & c_2 & c_4 & 0 \\ 0 & c_1 & c_3 & 0 \\ 0 & 1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} c_2 & c_4 & 0 \\ c_1 & c_3 & 0 \\ 1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} - c_3 \begin{vmatrix} 1 & c_4 & 0 \\ 0 & c_3 & 0 \\ 0 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} \\
&= c_1(c_2c_3c_4 - c_4c_1c_4) - c_3c_3c_4 \\
&= c_1c_2c_3c_4 - c_1c_4c_1c_4 - c_3c_3c_4 \\
&= c_4(c_1c_2c_3 - c_1c_1c_4 - c_3c_3) \\
&= c_4H_3
\end{aligned}$$

Adapun

$$\begin{aligned}
c_4 &= (a_1a_2a_3 - a_1\gamma\theta)(\beta I^* + \mu) - a_3\mu\eta\beta S^* \\
&= (a_1a_2a_3 - a_1\gamma\theta)(\mu(R_0 - 1) + \mu) - a_3\mu \frac{a_1(a_2a_3 - \gamma\theta)}{a_3} \\
&= \mu R_0 a_1(a_2a_3 - \gamma\theta) - \mu a_1(a_2a_3 - \gamma\theta) \\
&= \mu a_1(a_2a_3 - \gamma\theta)(R_0 - 1) \\
&= \mu(\sigma + \eta + \mu)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)(R_0 - 1) \\
c_4 &> 0 \text{ ekuivalen dengan } R_0 > 1, \text{ sehingga } H_4 > 0 \text{ ketika } R_0 > 1.
\end{aligned}$$

Dari penjelasan di atas diketahui bahwa $H_1 > 0$, $H_2 > 0$, $H_3 > 0$, $H_4 > 0$, dengan kriteria Routh Hurwitz akar dari persamaan (4.32) berupa bilangan real negatif. Menurut teori kestabilan maka titik kesetimbangan endemik P^* akan stabil asimtotik lokal ketika $R_0 > 1$.

5. Simulasi Numerik

Simulasi model dilakukan menggunakan software matlab R2011a dengan metode euler. Pada bagian ini dilakukan simulasi pada titik kesetimbangan bebas rumor dan

titik kesetimbangan endemik. Adapun proses simulasi ini dilakukan guna memberikan gambaran geometris serta mengetahui nilai kesetimbangan tiap kelas populasi dengan nilai awal tertentu.

a) Simulasi dalam Keadaan Bebas Rumor

Simulasi numerik dalam keadaan bebas rumor dilakukan dengan menggunakan nilai awal populasi rentan yaitu $S(1)=40000$, pada populasi berbahaya $D(1)=30000$; populasi terinfeksi $I(1)=30000$, populasi latent $L(1)=0$, dan populasi sembuh $R(1)=0$. Sedangkan nilai-nilai parameter yang diberikan untuk membuat simulasi dari model penyebaran rumor disajikan dalam tabel 4.3

Tabel 4.3 Nilai-nilai Parameter untuk Simulasi Model saat $R_0 < 1$

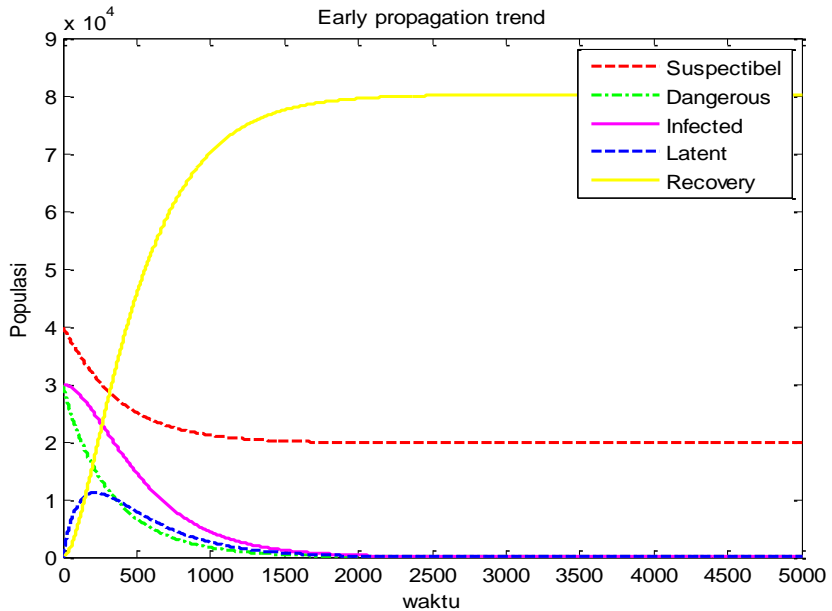
Parameter	Keterangan	Nilai	Satuan
β	Probabilitas transisi dari populasi rentan ke populasi yang berbahaya	0.00000004	Perhari
μ	Tingkat kelahiran/kematian alami	0.0000003	Perhari
η	Probabilitas transisi dari populasi berbahaya ke populasi terinfeksi	0.005	Perhari
γ	Probabilitas transisi dari terinfeksi ke latent, yaitu tingkat	0.005	Perhari

	kontrol		
σ	Probabilitas transisi dari populasi berbahaya ke pulih	0.0000004	Perhari
θ	Probabilitas transisi dari latent ke terinfeksi, yaitu tingkat pengulangan	0.001	Perhari
φ	Probabilitas transisi dari latent ke dipulihkan, yaitu tingkat pemulihan	0.01	Perhari
N	Total populasi	100.000	Perhari

Dari tabel diatas akan dihasilkan nilai R_0 :

$$R_0 = \frac{\eta\beta S(\theta+\varphi+\mu)}{(\sigma+\eta+\mu)(\varphi\gamma+\varphi\mu+\theta\mu+\gamma\mu+\mu^2)} \approx 0.88 < 1$$

Selanjutnya simulasi dalam keadaan bebas rumor ditunjukkan menggunakan program matlab dalam gambar 4.2 dengan Interval waktu yang digunakan dari 2000 sampai 5000.



Gambar 4.2 Grafik Dinamika saat $R_0 < 1$

Pada gambar 4.2 dapat diketahui bahwa laju pertumbuhan populasi sel rentan mengalami penurunan. Hal tersebut dikarenakan populasi terinfeksi menyebarkan rumor pada populasi rentan sehingga mengubah individu dalam populasi rentan menjadi populasi berbahaya. Laju pertumbuhan rentan akan terus menurun sampai dimana populasi terinfeksi tidak mengalami perubahan atau dalam keadaan setimbang. Individu dalam populasi berbahaya tidak akan bertahan dalam kurun waktu yang lama, ketika mereka mulai mengetahui rumor kemungkinan besar akan berubah,

sehingga jumlah populasi berbahaya berkurang sepanjang waktu. Populasi terinfeksi akan terus menurun sampai laju pertumbuhan populasi sembuh tidak mengalami perubahan atau dalam keadaan setimbang. Populasi latent ditemukan adanya kenaikan pada interval waktu 0 sampai kurang dari 500, namun setelahnya mengalami penurunan seperti halnya pada populasi lain. Selanjutnya populasi bebas rumor atau sembuh (*Recovery*) mengalami kenaikan pada saat t tertentu, ini dikarenakan populasi terinfeksi mulai berkurang. Selanjutnya laju pertumbuhan populasi sembuh akan setimbang ketika populasi berbahaya dan latent tidak mengalami perubahan atau dalam keadaan setimbang. Sehingga diperoleh hasil kesetimbangan $P^0 = (S^0, D^0, I^0, L^0) = (N, 0, 0, 0)$, hasil tersebut mendukung hasil analisis sebelumnya bahwa ketika $R_0 < 1$ maka kesetimbangan bebas rumor akan stabil asimtotik lokal. Dapat disimpulkan bahwa ketika $R_0 < 1$ maka rumor akan berhenti menyebar dalam populasi.

b) Simulasi dalam Keadaan Endemik

Pada keadaan endemik simulasi numerik akan dilakukan dengan nilai awal populasi rentan $S(1)=40000$, populasi berbahaya $D(1)=30000$, populasi terinfeksi $I(1)=30000$, populasi latent $L(1)=0$, dan populasi sembuh

$R(1)=0$. Adapun nilai parameter yang digunakan ditunjukkan dalam tabel 4.4.

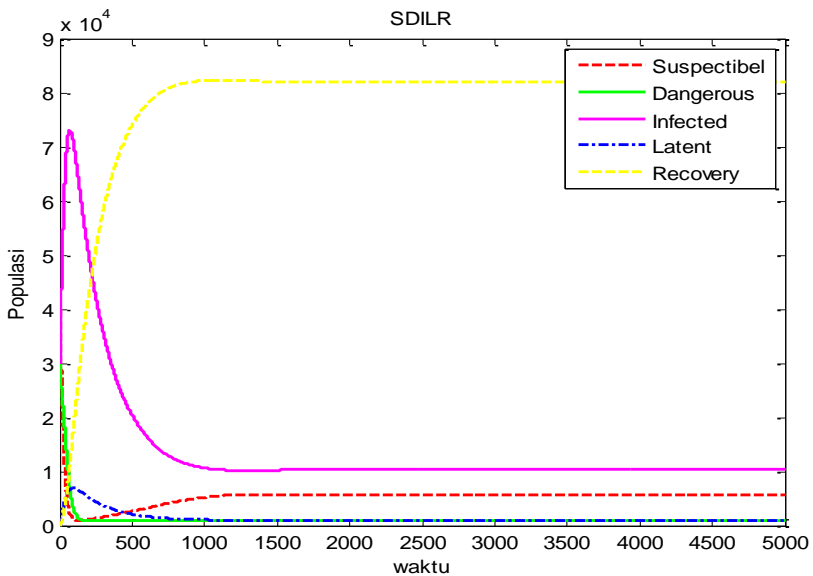
Tabel 4.4 Nilai-nilai Parameter untuk Simulasi Model saat $R_0 > 1$

Parameter	Keterangan	Nilai	Satuan
β	Probabilitas transisi dari populasi rentan ke populasi yang berbahaya	0.0000008	Perhari
μ	Tingkat kelahiran/kematian alami	0.0005	Perhari
η	Probabilitas transisi dari populasi berbahaya ke populasi terinfeksi	0.05	Perhari
γ	Probabilitas transisi dari terinfeksi ke latent, yaitu tingkat kontrol	0.005	Perhari
σ	Probabilitas transisi dari populasi berbahaya ke pulih	0.0000004	Perhari
θ	Probabilitas transisi dari latent ke terinfeksi, yaitu tingkat pengulangan	0.01	Perhari
φ	Probabilitas transisi dari latent ke dipulihkan, yaitu tingkat pemulihan	0.04	Perhari
N	Total populasi	100.000	Perhari

Berdasarkan nilai parameter yang telah disebutkan dalam tabel 4.4 diperoleh angka reproduksi dasar sebagai berikut:

$$R_0 = \frac{\eta\beta S(\theta + \varphi + \mu)}{(\sigma + \eta + \mu)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)} \approx 17.56 > 1$$

Simulasi dalam keadaan endemik dapat ditunjukkan menggunakan program matlab dalam gambar 4.3.



Gambar 4.3 Grafik Dinamika saat $R_0 > 1$

Pada gambar 4.3 terlihat bahwa laju pertumbuhan populasi rentan mengalami penurunan tajam. Penurunan disebabkan populasi rentan mengetahui adanya rumor dan kemudian menjadi populasi berbahaya. Selanjutnya laju

pertumbuhan populasi rentan mengalami kenaikan. Kenaikan tersebut dikarenakan berkurangnya rumor yang menginfeksi populasi rentan, keadaan ini terus berlangsung sampai laju pertumbuhan tidak mengalami perubahan atau dalam keadaan setimbang pada titik tertentu. Selanjutnya laju pertumbuhan populasi berbahaya akan mengalami kenaikan. Hal tersebut dikarenakan populasi rentan yang mengetahui adanya rumor menjadi kelompok berbahaya. Selanjutnya laju pertumbuhan populasi berbahaya perlahan turun, hal ini dikarenakan laju perubahan populasi berbahaya ke terinfeksi lebih besar dari laju penambahan populasi berbahaya.

Adapun populasi terinfeksi akan mengalami kenaikan sehubungan dengan adanya perubahan populasi berbahaya ke terinfeksi. Populasi terinfeksi kemudian akan mengalami penurunan sampai waktu t tertentu, dan akan setimbang ketika tidak ada perubahan pada populasi latent dan sembuh. Populasi latent akan mengalami penurunan sampai dengan populasi terinfeksi berada pada titik setimbang. Pertumbuhan populasi sembuh akan mengalami kenaikan sampai dengan waktu t tertentu. Selanjutnya laju pertumbuhan populasi sembuh akan mengalami kesetimbangan, kondisi ini terjadi ketika populasi terinfeksi sampai dalam kondisi setimbang. Sehingga diperoleh hasil kesetimbangan

$P^* = (S^*, D^*, I^*, L^*, R^*) = (5694, 933, 10351, 1024, 81998)$,
 hasil tersebut mendukung hasil analisis sebelumnya bahwa
 ketika $R_0 > 1$ maka kesetimbangan endemik akan stabil
 asimtotik lokal. Dalam hal ini jika $R_0 > 1$ maka terjadi
 pengulangan rumor di media sosial.

B. Pembahasan

Berdasarkan hasil penelitian Analisis Kestabilan Model
 SDILR Dengan Adanya Pengulangan Rumor Pada Media
 Sosial menggunakan, hasil yang diperoleh terdapat dua titik
 kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas rumor dan
 titik kesetimbangan endemik $P^0 = (S^0, D^0, I^0, L^0) = (N, 0, 0, 0)$
 dan $P^* = (S^*, D^*, I^*, L^*)$

$$= \left(\frac{(\sigma + \eta + \mu)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)}{\beta\eta(\theta + \varphi + \mu)}, \frac{\mu(N - S)}{\sigma + \eta + \mu}, \frac{\mu(N - S)}{\beta S}, \frac{\gamma I}{\theta + \varphi + \mu} \right)$$

Analisis yang dilakukan menghasilkan angka reproduksi
 dasar $R_0 = \frac{\eta\beta S(\theta + \varphi + \mu)}{(\sigma + \eta + \mu)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)}$. Titik kesetimbangan
 bebas rumor akan stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$. Dan titik
 kesetimbangan endemik akan stabil asimtotik lokal jika
 $R_0 > 1$.

Selanjutnya maka dilakukan simulasi model
 menggunakan Matlab. Penulis menggunakan program Matlab,
 berdasarkan penelitian Ikurnia Nur Pratama tahun 2014
 dengan judul “Analisis Stabilitas Model Epidemik SEIV
 (Susceptible-Exposed-Invected-Vaccinated) Pada Penyebaran
 Penyakit Hepatitis B diKabupaten Jember”. Penelitian ini juga

melakukan simulasi numerik menggunakan program matlab, hal ini dikarenakan program tersebut menurut penulis mudah untuk dipahami dan mempunyai hasil menarik.

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, diperoleh kesimpulan berikut:

1. Model matematika SDILR engulangan rumor di media sosial mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu

Titik kesetimbangan bebas rumor $P^0 = (N, 0, 0, 0)$.

Titik kesetimbangan endemik $P^* =$

$$\left(\frac{(\sigma + \eta + \mu)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)}{\beta\eta(\theta + \varphi + \mu)}, \frac{\mu(N - S)}{\sigma + \eta + \mu}, \frac{\mu(N - S)}{\beta S}, \frac{\gamma I}{\theta + \varphi + \mu} \right)$$

rdasarkan analisis kestabilan sistem persamaan (5.1)

diperoleh angka reproduksi dasar

$$R_0 = \frac{\eta\beta S(\theta + \varphi + \mu)}{(\sigma + \eta + \mu)(\varphi\gamma + \varphi\mu + \theta\mu + \gamma\mu + \mu^2)}, \text{ berdasarkan nilai } R_0$$

tersebut didapat beberapa simpulan:

- 1) Jika $R_0 < 1$ maka sistem akan stabil asimtotik lokal pada keadaan bebas rumor.
 - 2) Jika $R_0 > 1$ maka sistem akan stabil asimtotik lokal pada keadaan endemik.
2. Dari hasil simulasi pada pembahasan sebelumnya dengan menggunakan Matlab R2011a, diperoleh hasil bahwa ketika $R_0 < 1$ maka pengulangan rumor akan terhenti dan jika $R_0 > 1$ maka terjadi pengulangan rumor di media sosial.

B. Saran

Berdasarkan kesimpulan sebelumnya penulis memiliki beberapa saran untuk penelitian selanjutnya, yaitu sebagai berikut:

- 1) Model yang digunakan mengacu pada suatu jurnal internasional, selanjutnya model tersebut bisa ditambah variabel baru seperti cara mengontrol ataupun mengurangi berkembangnya rumor menggunakan sosialisasi dampak dari rumor kepada masyarakat maupun sejenisnya.
- 2) Menggunakan metode numerik yang berbeda dalam penyelesaiannya misal menggunakan aplikasi maple dan lain sebagainya.
- 3) Menentukan perlakuan yang berbeda dengan penelitian yang telah ada, seperti menentukan kontrol optimal pada model yang dibahas dengan menambahkan variable kontrolnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, Howard. 2003. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga
- Ardiana. 2012. Analisis Kestabilan Dinamika Interaksi Patogen-Imun. *Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*. 1(1): 30-31
- Boyce, W.E. dan DiPrima, R.C. 1997. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. Sixth Edition*. John Wiley and Sons, New York.
- Daley, D.J. dan D.G. Kendall. 1965. Stochastic Rumours. *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*. 1 : 42-55.
- Griffiths, D.F. dan Higham, D.J. 2010. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. London: Springer.
- Herawati, Netty dkk. 2019. Implikasi Literasi Media Dalam Mengubah Perilaku Masyarakat Kota Pontianak Terhadap Kabar Bohong. *Jurnal Komunikasi dan Media*. 3(2) : 102.
- Maki, D.P., dan M. Thompson. 1973. *Mathematical Models and Applications: With Emphasis on the Social, Life, and Management Sciences*. Prentice-Hall. Englewood Cliffs.
- Ndii, M.Z., Carnia, E., dan Supriatna, A.K. 2018. *Mathematical Models for spread of Rumours: A Review*.
- Kocak, H. & Hole, J. K. 1991. *Dynamic and Bifurcation*. New York: Springer- Verlag.
- Murray JD. 2002. *Mathematical Biology. I. An Introduction. Third Edition*. Springer-Verlag. New York.
- Ningsih, Wahyuni dkk. 2019. Kendali Optimal Model Matematika Penyebaran Rumor pada Jaringan Sosial Daring dengan Pemberian Pernyataan Balasan. *Prosiding Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai Islami*. 3(1): 17
- Perko, Lawrence. 2001. *Differential Equations and Dynamical Systems*. 3rd. New York: Springer.

- Resmawan. 2018. *PD Linear Orde 2 Homogen Koefisien Konstan*. Gorontalo: Universitas Negeri Gorontalo
- Saputra, Devid. 2020. Fenomena Informasi Palsu (Hoax) Pada Media Sosial di Tengah Pandemi Covid-19 dalam Perspektif Islam. *Mau'idhoh Hasanah : Jurnal Dakwah dan Ilmu Komunikasi*. 2(1): 1-6
- Tu, P. N. V. 1994. *Dynamical System, An Introduction with Applications in Economics and Biology*. Springer-Verlag. Hiedelberg, Germany.
- Widowati & Sutimin. 2007. *Buku ajar pemodelan matematika*. Semarang: Universitas Diponegoro
- Wiggins, Stephen. 1990. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. New York: Springer

Lampiran 1. Program MATLAB model matematika penyebaran rumor di media sosial

```
%parameter
N=100000;
mu=0.0000003;
beta=0.00000004;
eta=0.005;
gamma=0.005;
sigma=0.0000004;
teta=0.001;
psi=0.01;
waktu=5000;

%nilai awal
S(1)=40000;
D(1)=30000;
I(1)=30000;
L(1)=0;
R(1)=0;
dt=0.01;
h=dt;
for i=2:waktu/dt
S(i)=real(S(i-1)+(mu*N-beta*S(i-1)*I(i-1)-mu*S(i-1))*dt);
D(i)=real(D(i-1)+(beta*S(i-1)*I(i-1)-sigma*D(i-1)-eta*D(i-1)-
mu*D(i-1))*dt);
```

```

I(i)=real(I(i-1)+(eta*D(i-1)-gamma*I(i-1)+teta*L(i-1)-mu*I(i-
1))*dt);
L(i)=real(L(i-1)+(gamma*I(i-1)-teta*L(i-1)-psi*L(i-1)-mu*L(i-
1))*dt);
R(i)=real(R(i-1)+(sigma*D(i-1)+psi*L(i-1)-mu*R(i-1))*dt);
end
figure(1)
plot(dt:dt:waktu,S,'-r','LineWidth',2);hold on
plot(dt:dt:waktu,D,'-g','LineWidth',2);
plot(dt:dt:waktu,I,'m','LineWidth',2);
plot(dt:dt:waktu,L,'-b','LineWidth',2);
plot(dt:dt:waktu,R,'-y','LineWidth',2);
legend({'Suspectibel','Dangerous','Infected','Latent','Recovery'});
ylabel('Populasi');
xlabel('waktu');
Title('Early propagation trend');

```


DAFTAR RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

Nama Lengkap : Dwi Irmayanti
Tempat Tanggal Lahir : Pekalongan, 07 Desember 1998
Alamat : Ds. Wringinagung, RT/07 RW/02 Kec. Doro, Kab. Pekalongan
Nomer HP : 088224107583
E-mail : irmayantidwi7@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan

1. Pendidikan Formal

- a) SD Negeri 03 Wringinagung Pekalongan lulus tahun 2010
- a) MTs Syarif Hidayah Doro Pekalongan lulus tahun 2014
- b) MA Salafiyah Simbang Kulon Pekalongan lulus tahun 2017.
- c) UIN Walisongo Semarang

2. Pendidikan Non Formal

- a) Pondok Pesantren Fathul Ulum Simbang Kulon Buaran Pekalongan.

Semarang, 29 Juni 2021



Dwi Irmayanti
NIM. 1708046001